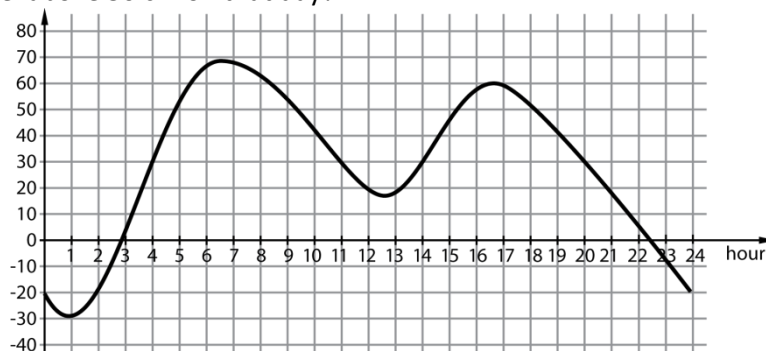


# Kangourou Maths 2012 – Student Level 11-12

## Προβλήματα 3 μονάδων - 3 point problems

1. Το επίπεδο του νερού σε μια παραλιακή πόλη αυξάνεται και μειώνεται σε συγκεκριμένη μέρα όπως φαίνεται στο διάγραμμα. Για πόσες ώρες το επίπεδο του νερού ήταν πάνω από 30 cm σε αυτή τη μέρα.

The water level in a port city rises and falls on a certain day as shown in the figure. How many hours was the water level above 30 cm on that day?



- (A) 5                      (B) 6                      (C) 7                      (D) 9                      (E) 13

2. Ο αριθμός  $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$  ισούται με

The number  $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$  is equal to

- (A) 1                      (B)  $\sqrt{2}$                       (C)  $\sqrt[6]{4}$                       (D)  $\sqrt[3]{4}$                       (E) 2

3. Σε μια λίστα από πέντε αριθμούς, ο πρώτος αριθμός είναι 2 και ο τελευταίος 12. Το γινόμενο των πρώτων τριών αριθμών είναι 30, το γινόμενο των τριών μεσαίων αριθμών είναι 90 και το γινόμενο των τελευταίων τριών αριθμών είναι 360. Ποιος αριθμός βρίσκεται στο μέσο της λίστας;

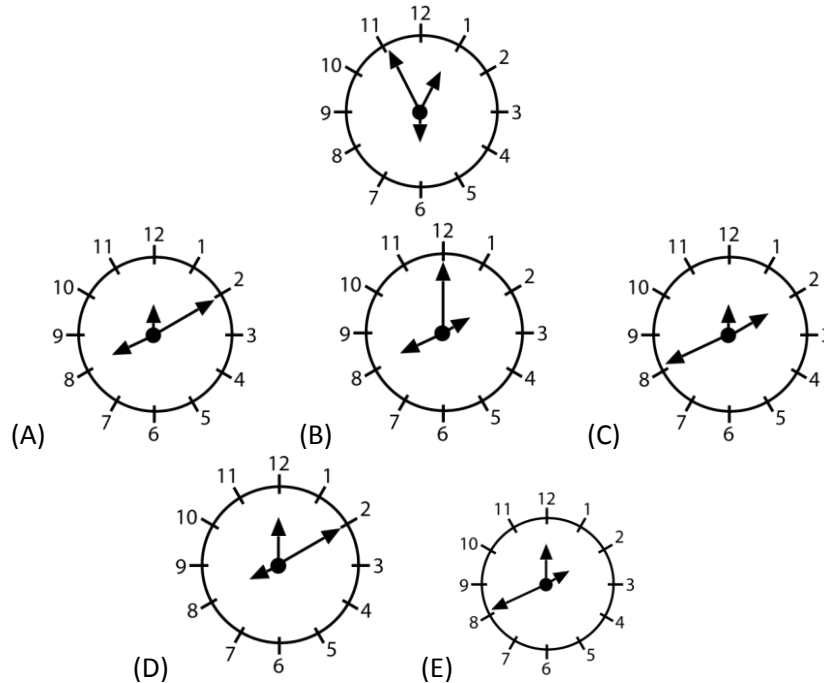
In a list of five numbers, the first number is 2 and the last number is 12. The product of the first three numbers is 30, the product of the three in the middle is 90 and the product of the last three numbers is 360. Which number is in the center of the list?



- (A) 3                      (B) 4                      (C) 5                      (D) 6                      (E) 10

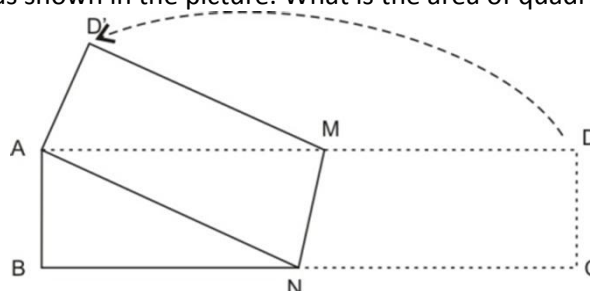
4. Ένα ρολόι έχει τρεις δείχτες διαφορετικού μήκους (για τις ώρες, για τα λεπτά και για τα δευτερόλεπτα). Δεν γνωρίζουμε τι δείχνει ο κάθε δείκτης αλλά γνωρίζουμε ότι οι δείχτες στρέφονται δεξιόστροφα. Στις 12:55:30 οι δείχτες ήταν στη θέση που φαίνεται. Ποια από τις εικόνες δείχνει το ρολόι στις 8:10:00;

A clock has 3 hands of different length (for hours, for minutes, and for seconds). We do not know what each of the hands shows but we know that the hands rotate right wise. At 12:55:30 the hands were in the positions shown. Which of the pictures shows this clock at 8:10:00?



5. Ένα ορθογώνιο κομμάτι χαρτιού ABCD  $4\text{ cm} \times 16\text{ cm}$  διπλώνεται κατά μήκος της ευθείας MN ώστε η κορυφή C συμπίπτει με την κορυφή A, όπως φαίνεται στο σχήμα. Ποιά είναι το εμβαδό του τετραπλεύρου ANMD'?

A rectangular piece of paper ABCD  $4\text{ cm} \times 16\text{ cm}$  is folded along the line MN such that vertex C coincides with vertex A, as shown in the picture. What is the area of quadrilateral ANMD'?



- (A)  $28\text{ cm}^2$     (B)  $30\text{ cm}^2$     (C)  $32\text{ cm}^2$     (D)  $48\text{ cm}^2$     (E)  $56\text{ cm}^2$

6. Το άθροισμα των ψηφίων ενός ενια-ψηφίου αριθμού είναι 8. Ποιο είναι το γινόμενο αυτών των ψηφίων;

The sum of the digits of a nine-digit number is 8. What is the product of these digits?

- (A) 0    (B) 1    (C) 8    (D) 9    (E) 9!

7. Η μέγιστη τιμή του φυσικού αριθμού  $n$ , ώστε  $n^{200} < 5^{300}$ , ισούται με  
 The maximum natural value  $n$ , for which  $n^{200} < 5^{300}$ , is equal to:  
 (A) 5 (B) 6 (C) 8 (D) 11 (E) 12

8. Ποια από τις συναρτήσεις ικανοποιεί την εξίσωση  $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)}$

Which of the following functions satisfies the equation

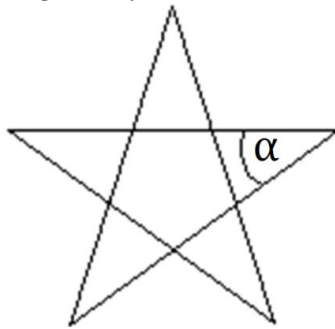
$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)}?$$

(A)  $f(x) = \frac{2}{x}$  (B)  $f(x) = \frac{1}{x+1}$  (C)  $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$  (D)  $f(x) = \frac{1}{x}$  (E)  $f(x) = x + \frac{1}{x}$

9. Ένας πραγματικός αριθμός  $x$  ικανοποιεί την σχέση  $x^3 < 64 < x^2$ . Ποια σχέση είναι ορθή;  
 A real number  $x$  satisfies  $x^3 < 64 < x^2$ . Which statement is correct?

(A)  $0 < x < 64$  (B)  $-8 < x < 4$  (C)  $x > 8$   
 (D)  $-4 < x < 8$  (E)  $x < -8$

10. Ποιο είναι το μέγεθος της γωνίας  $\alpha$  στο κανονικό αστέρι πέντε κορυφών.  
 What is the size of the angle  $\alpha$  in the regular 5-point star?



(A)  $24^\circ$  (B)  $30^\circ$  (C)  $36^\circ$  (D)  $45^\circ$  (E)  $72^\circ$

#### Προβλήματα 4 μονάδων - 4 point problems

11. Η ηλικία μου είναι διψήφιος αριθμός και δύναμη του 5, και η ηλικία των ξαδέλφου μου είναι διψήφιος αριθμός και δύναμη του 2. Το άθροισμα των ψηφίων των ηλικιών μας είναι περιττός αριθμός. Ποιο είναι το γινόμενο των ψηφίων των ηλικιών μας;

My age is a two-digit number, which is a power of 5, and my cousin's age is a two-digit number, which is a power of 2. The sum of the digits of our ages is an odd number. What is the product of the digits of our ages?

(A) 240 (B) 2010 (C) 60 (D) 50 (E) 300

12. Ένα ταξιδιωτικό γραφείο οργάνωσε τέσσερα προαιρετικά ταξίδια στη Σικελία για μια ομάδα τουριστών. Το κάθε ταξίδι είχε συμμετοχή 80%. Ποιο είναι το μικρότερο δυνατό ποσοστό τουριστών που συμμετέχουν και στα τέσσερα ταξίδια;

A travel agency organized four optional tours of Sicily for a group of tourists. Each tour had a participation rate of 80%. What is the smallest possible percentage of tourists taking part in all four tours?

(A) 80% (B) 60% (C) 40% (D) 20% (E) 16%

13. Το σύνολο των λύσεων της ανισότητας  $|x| + |x-3| > 3$  είναι:

The set of solutions for the inequality  $|x| + |x-3| > 3$  is:

- (A)  $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$     (B)  $(3, 3)$     (C)  $(-\infty, -3)$   
(D)  $(-3, +\infty)$     (E) όλοι οι πραγματικοί αριθμοί / all real numbers

14. Οι σχολικές βαθμολογίες στη Σλοβακία διαιρούνται σε πέντε βαθμίδες, από 1(το καλύτερο) μέχρι 5 (το χειρότερο). Σε ένα σχολείο της Σλοβακίας, στην Τετάρτη τάξη, ένα διαγώνισμα δεν είχε καλό αποτέλεσμα. Ο μέσος όρος βαθμού ήταν 4. Τα αγόρια πήγαν λίγο καλύτερα, ο μέσος όρος βαθμολογίας τους ήταν 3,6, ενώ ο μέσος όρος της βαθμολογίας των κοριτσιών ήταν 4,2. Ποιο από τις πιο κάτω προτάσεις είναι σωστή;

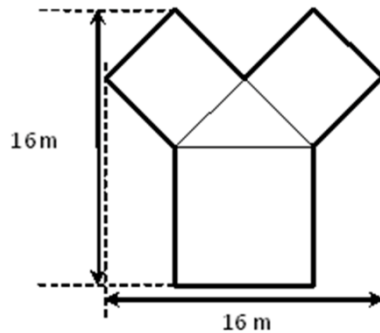
- (A) Υπάρχουν διπλάσια αγόρια από κορίτσια    (B) Υπάρχουν τετραπλάσια αγόρια από κορίτσια  
(C) Υπάρχουν διπλάσια κορίτσια από αγόρια    (D) Υπάρχουν τετραπλάσια κορίτσια από αγόρια  
(E) Υπάρχουν τόσα αγόρια όσα και κορίτσια στην τάξη

School marks in Slovakia are divided into five degrees, from 1 (the best) to 5. In one Slovak school, a test didn't turn out very well in the 4th class. The average mark was 4. Boys did a little better, their average mark was 3,6 while the average mark of the girls was 4,2. Which of the following statements is correct?

- (A) There are twice as many boys as girls.    (B) There are 4 times as many boys as girls.  
(C) There are twice as many girls as boys.    (D) There are 4 times as many girls as boys.  
(E) There are as many boys in the class as girls.

15. Η εικόνα δείχνει το φυτώριο τριαντάφυλλων. Τα άσπρα τριαντάφυλλα μεγαλώνουν στα ίσα τετράγωνα, τα κόκκινα τριαντάφυλλα μεγαλώνουν στο τρίτο τετράγωνο. Τα κίτρινα τριαντάφυλλα μεγαλώνουν στο ορθογώνιο τρίγωνο. Το μήκος και πλάτος του φυτωρίου είναι 16m. Ποιο είναι το εμβαδό του φυτωρίου τριαντάφυλλων.

The picture shows a rose ground. White roses grow in the equal squares, red roses grow in the third square. Yellow roses grow in the right-angled triangle. Both the length and height of the ground is 16 m. What is the area of the rose ground?



- (A)  $114 \text{ m}^2$     (B)  $130 \text{ m}^2$     (C)  $144 \text{ m}^2$     (D)  $160 \text{ m}^2$     (E)  $186 \text{ m}^2$

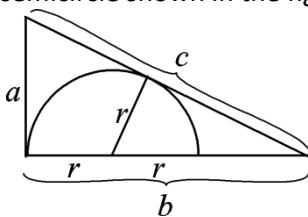
16. Όλα τα εισιτήρια στη πρώτη σειρά ενός σινεμά πωλήθηκαν. Οι θέσεις είναι διαδοχικά αριθμημένες αρχίζοντας από το 1. Ένα επιπλέον εισιτήριο πωλήθηκε για μια θέση κατά λάθος. Το άθροισμα των αριθμών των θέσεων όλων των εισιτηρίων που πωλήθηκαν για την πρώτη σειρά ισούται με 857. Ποιος είναι ο αριθμός της θέσης για την οποία πωλήθηκαν δύο εισιτήρια κατά λάθος;

All the tickets in the first row in a cinema were sold. The seats are numbered consecutively starting with 1. An extra ticket was sold for one seat by mistake. The sum of the seat numbers on all tickets sold for the first row is equal to 857. What is the number of the seat for which two tickets were sold by mistake?

- (A) 4    (B) 16    (C) 25    (D) 37    (E) 42

17. Μας δίδεται ένα ορθογώνιο τρίγωνο με πλευρές  $a$ ,  $b$  και  $c$ . Ποια η τιμή της ακτίνας  $r$  του εγγεγραμμένου ημικύκλιου που φαίνεται στο σχήμα;

We are given a right triangle with the sides  $a$ ,  $b$  and  $c$ . What is the radius  $r$  of the inscribed semicircle shown in the figure?



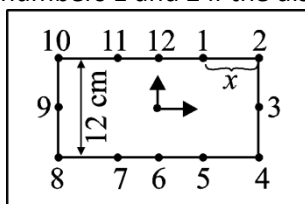
- (A)  $\frac{a(c-a)}{2b}$     (B)  $\frac{ab}{a+b+c}$     (C)  $\frac{ab}{b+c}$     (D)  $\frac{2ab}{a+b+c}$     (E)  $\frac{ab}{a+c}$

18. Ένα τετράγωνο ABCD έχει πλευρές μήκους 2. E και F είναι τα μέσα των πλευρών AB και AD αντίστοιχα. Το G είναι σημείο πάνω στο CF ώστε  $3CG=2GF$ . Το εμβαδό του τριγώνου BEG είναι:

A square ABCD has sides of length 2. E and F are the midpoints of the sides AB and AD respectively. G is a point on CF such that  $3CG=2GF$ . The area of triangle BEG is:

- (A)  $\frac{7}{10}$     (B)  $\frac{4}{5}$     (C)  $\frac{8}{5}$     (D)  $\frac{3}{5}$     (E)  $\frac{6}{5}$

19. Το ρολόι στην εικόνα έχει σχήμα ορθογωνίου. Ποια είναι η απόσταση  $x$  του συνδέσμου μεταξύ των αριθμών 1 και 2, αν η απόσταση μεταξύ των αριθμών 8 και 10 είναι 12 cm;  
The clock in the picture is rectangular in shape. What is the distance  $x$  on the dial between the numbers 1 and 2 if the distance between the numbers 8 and 10 is 12cm?



- (A)  $3\sqrt{3}$       (B)  $2\sqrt{3}$       (C)  $4\sqrt{3}$       (D)  $2 + \sqrt{3}$       (E)  $12 - 3\sqrt{3}$

20. Ένα Κανγκουρό θέλει να κτίσει μια σειρά από συνηθισμένα ζάρια (απέναντι επιφάνειες προσθέτουν σε 7 κουκκίδες). Μπορεί να κολλήσει δύο επιφάνειες μαζί αν έχουν τον ίδιο αριθμό κουκκίδων. Θα ήθελε το σύνολο των κουκκίδων στις εξωτερικές επιφάνειες του ζαριού της σειράς να είναι 2012.

A kangaroo wants to build a row of standard dice (opposite faces add up 7 dots).

He can glue two faces together if they have the same number of dots.

He would like the total number of dots on the outer faces of the dice in the row to be 2012.

How many dice does he need?



- (A) 70  
(B) 71  
(C) 142  
(D) 143  
(E) Είναι αδύνατον να δει ακριβώς 2012 κουκκίδες/ It is impossible to see exactly 2012 dots

### Προβλήματα 5 μονάδων - 5 point problems

21. Ποια είναι η μικρότερη δυνατή τιμή γωνίας ενός ισοσκελούς τριγώνου ABC το οποίο έχει διάμεσο που διαιρεί το τρίγωνο σε δύο ισοσκελή τρίγωνα.

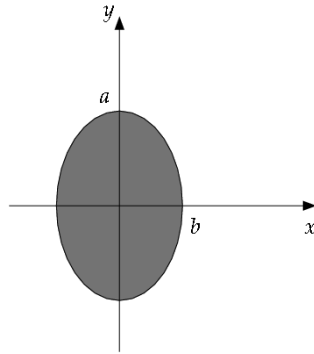
What is the smallest possible size of an angle in an isosceles triangle ABC that has a median that divides the triangle into two isosceles triangles?

- (A)  $15^\circ$       (B)  $22,5^\circ$       (C)  $30^\circ$       (D)  $36^\circ$       (E)  $45^\circ$

22. Έστω  $a > b$ . Αν η έλλειψη που φαίνεται στο σχήμα περιστραφεί γύρω από τον άξονα  $x$  παίρνουμε το ελλειψοειδές  $E_x$  με όγκο  $\text{Vol}(E_x)$ . Αν περιστραφεί γύρω από τον άξονα  $y$  παίρνουμε ελλειψοειδές  $E_y$  με όγκο  $\text{Vol}(E_y)$ . Ποια από τις πιο κάτω προτάσεις είναι ορθή;

Let  $a > b$ . If the ellipse shown in the

picture is rotated around the  $x$ -axis one obtains the ellipsoid  $E_x$  with the volume  $\text{Vol}(E_x)$ . If it is rotated around the  $y$ -axis one obtains ellipsoid  $E_y$  with the volume  $\text{Vol}(E_y)$ . Which of the following statements is true?



- (A)  $E_x = E_y$  and/και  $Vol(E_x) = Vol(E_y)$       (B)  $E_x = E_y$  but/αλλά  $Vol(E_x) \neq Vol(E_y)$   
 (C)  $E_x \neq E_y$  and/και  $Vol(E_x) > Vol(E_y)$       (D)  $E_x \neq E_y$  and/και  $Vol(E_x) < Vol(E_y)$   
 (E)  $E_x \neq E_y$  but/αλλά  $Vol(E_x) = Vol(E_y)$

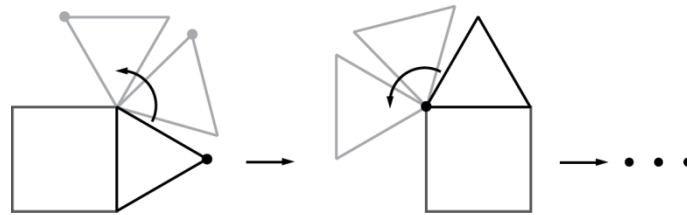
23. Δύο πράξεις μπορούν να γίνουν με κλάσματα: 1) αύξηση του αριθμητή κατά 8; 2) αύξηση του παρονομαστή κατά 7. Μετά από εφαρμογή ενός συνόλου  $n$  τέτοιων πράξεων με κάποια σειρά, αρχίζοντας με το κλάσμα  $\frac{7}{8}$  παίρνουμε κλάσμα ίσης τιμής. Ποια είναι η μικρότερη δυνατή τιμή του  $n$ ;

Two operations can be performed with fractions: 1) to increase the numerator by 8; 2) to increase the denominator by 7. Having performed a total number of  $n$  such operations in some order, starting with the fraction  $\frac{7}{8}$  we obtain a fraction of equal value. What is the smallest possible value of  $n$ ?

- (A) 56      (B) 81      (C) 109  
 (D) 113      (E) Αυτό είναι αδύνατο/This is impossible.

24. Ένα ισόπλευρο τρίγωνο περιστρέφεται γύρω από ένα τετράγωνο με πλευρά 1 (βλέπε την εικόνα).

An equilateral triangle rolls around a square with side length 1 (see picture).



Ποιο είναι το μήκος της διαδρομής που το σηματοδομένου σημείο διανύει μέχρι το τρίγωνο και το σημείο φθάσουν την αρχική του θέση ξανά;

What is the length of the path that the marked point covers until the triangle and the point reach their starting positions the next time?

- (A)  $4\pi$       (B)  $\frac{28}{3}\pi$       (C)  $8\pi$       (D)  $\frac{14}{3}\pi$       (E)  $\frac{21}{2}\pi$

25. Πόσες μεταθέσεις  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  του συνόλου των ακεραίων  $\{1, 2, 3, 4\}$  έχουν την ιδιότητα ότι το άθροισμα  $x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_4 + x_4 x_1$  διαιρείται με το 3;

How many permutations  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  of the set of integers  $\{1, 2, 3, 4\}$  have the property that the sum  $x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_4 + x_4 x_1$  is divisible by 3?

- (A) 8      (B) 12      (C) 14      (D) 16      (E) 24

26. Μετά από ένα μάθημα άλγεβρας, έμεινε στον πίνακα το εξής: η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $y = x^2$  και 2012 ευθείες παράλληλες προς την ευθεία  $y = x$ , η κάθε μια τέμνει την παραβολή σε δύο σημεία. Το άθροισμα των συντεταγμένων x των σημείων τομής των ευθειών και της παραβολής είναι:

After an algebra lesson, the following was left on the blackboard: the graph of the function  $y = x^2$  and 2012 lines parallel to the line  $y = x$ , each of which intersects the parabola in two points. The sum of the x-coordinates of the points of intersection of the lines and the parabola is:

- (A) 0            (B) 1            (C) 1006  
(D) 2012        (E) αδύνατο να υπολογιστεί/impossible to determine

27. Τρεις κορυφές ενός κύβου (όχι όλες πάνω στην ίδια πλευρά) είναι P(3;4;1), Q(5;2;9) και R(1;6;5). Ποιο σημείο είναι το κέντρο του κύβου;

Three vertices of a cube (not all on the same face) are P(3;4;1), Q(5;2;9) and R(1;6;5).

Which point is the center of the cube?

- (A) A(4;3;5)    (B) B(2;5;3)    (C) C(3;4;7)    (D) D(3;4;5)    (E) E(2;3;5)

28. Στην ακολουθία 1, 1, 0, 1, -1,... οι δύο πρώτοι όροι  $a_1$  και  $a_2$  είναι 1. Ο τρίτος όρος είναι η διαφορά των προηγούμενων δύο όρων,  $a_3 = a_1 - a_2$ . Ο τέταρτος είναι το άθροισμα των προηγούμενων δύο όρων,  $a_4 = a_2 + a_3$ . Μετά  $a_5 = a_3 - a_4$ ,  $a_6 = a_4 + a_5$  και ούτω καθεξής. Ποιο είναι το άθροισμα των πρώτων 100 όρων της ακολουθίας;

In the sequence 1, 1, 0, 1, -1,... the first two elements  $a_1$  and  $a_2$  are 1. The third element is the difference of the preceding two elements,  $a_3 = a_1 - a_2$ . The fourth is the sum of the two preceding elements,  $a_4 = a_2 + a_3$ .

Then  $a_5 = a_3 - a_4$ ,  $a_6 = a_4 + a_5$ , and so on. What is the sum of the first 100 elements of this sequence?

- (A) 0            (B) 3            (C) -21          (D) 100          (E) -1

29. Η Ιωάννα επιλέγει δύο αριθμούς a και b από το σύνολο {1, 2, 3, ..., 26}. Το γινόμενο ab είναι ίσο με το σύνολο των υπόλοιπων 24 αριθμών. Ποια είναι η τιμή του |a-b|;

Ioana picks out two numbers a and b from the set {1, 2, 3, ..., 26}. The product ab is equal to the sum of the remaining 24 numbers. What is the value of |a-b|?

- (A) 10            (B) 9            (C) 7            (D) 2            (E) 6

30. Κάθε γάτα στη χώρα των θαυμάτων είναι είτε σοφή είτε τρελή. Αν η σοφή γάτα τυγχάνει να είναι σε ένα δωμάτιο με 3 τρελές γάτες τότε γίνεται και αυτή τρελή. Αν μια τρελή γάτα τυγχάνει να είναι σε ένα δωμάτιο με 3 σοφές γάτες τότε εκτίθεται από αυτές ως τρελή. Τρεις γάτες εισέρχονται σε ένα κενό δωμάτιο. Αμέσως μετά που η 4<sup>η</sup> γάτα εισέρχεται, η 1<sup>η</sup> βγαίνει έξω. Μετά που η 5<sup>η</sup> γάτα εισέρχεται, η 2<sup>η</sup> βγαίνει έξω, κ.ο.κ. Μετά που η 2012<sup>η</sup> γάτα εισέρχεται, συμβαίνει για πρώτη φορά να εκτίθεται μια γάτα ως τρελή. Ποιες από αυτές τις γάτες θα μπορούσαν να είναι και οι δύο τρελές μετά που εισήχθησαν στο δωμάτιο;

Every cat in Wonderland is either wise or mad. If a wise cat happens to be in one room with 3 mad ones it turns mad. If a mad cat happens to be in one room with 3 wise ones it is exposed by them as mad. Three cats entered an empty room. Soon after the 4<sup>th</sup> cat entered, the 1<sup>st</sup> one went out. After the 5<sup>th</sup> cat entered, the 2<sup>nd</sup> one went out, etc. After the 2012<sup>th</sup> cat entered, it happened for the first time that one of the cats was exposed as mad. Which of these cats could both have been mad after entering the room?

- (A) 1<sup>st</sup> and 2011<sup>th</sup> / 1<sup>n</sup> και 2011<sup>n</sup>  
(B) 2<sup>nd</sup> and 2010<sup>th</sup> / 2<sup>n</sup> και 2010<sup>n</sup>  
(C) 3<sup>rd</sup> and 2009<sup>th</sup> / 3<sup>n</sup> και 2009<sup>n</sup>



(D) 4<sup>th</sup> and last one /4<sup>n</sup> και τελευταία  
(E) 2<sup>nd</sup> and 2011<sup>th</sup> /2<sup>n</sup> και 2011<sup>n</sup>