

MATHEMATIC KANGOUROU 2016 – Student-Levels 11-12

3 point problems (προβλήματα 3 μονάδων)

1. The sum of the ages of Tom and John is 23, the sum of the ages of John and Alex is 24 and the sum of the ages of Tom and Alex is 25. What is the age of the oldest one?

Το άθροισμα των ηλικιών του Tom και του John είναι 23, το άθροισμα των ηλικιών του John και του Alex είναι 24 και το άθροισμα των ηλικιών του Tom και του Alex είναι 25. Ποια είναι η ηλικία του μεγαλύτερου;

(A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13 (E) 14

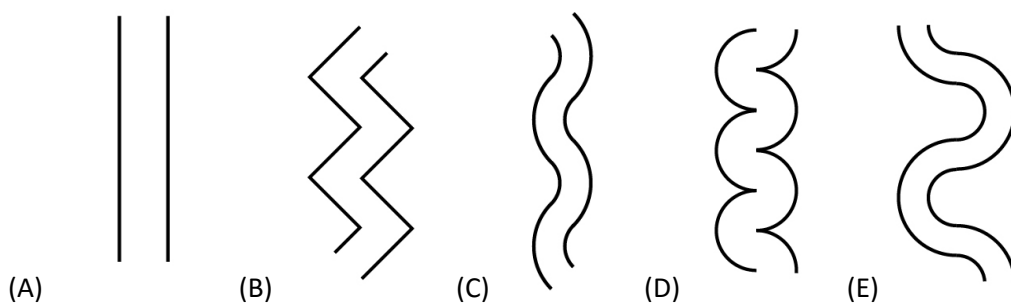
2. The sum of $\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000}$ is

Το άθροισμα του $\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000}$ είναι

(A) $\frac{3}{111}$ (B) $\frac{111}{1110}$ (C) $\frac{111}{1000}$ (D) $\frac{3}{1000}$ (E) $\frac{3}{1110}$

3. Maria wants to build a bridge across a river and knows that the shortest possible bridge from each point on one shore is always of the same length. Which of these pictures cannot be a picture of her river?

Η Μαρία θέλει να χτίσει μια γέφυρα σε ένα ποτάμι και γνωρίζει ότι για την πιο μικρή σε μήκος γέφυρα, κάθε σημείο της ακτής έχει πάντοτε το ίδιο μήκος. Ποια από αυτές τις εικόνες δεν μπορεί να είναι εικόνα του ποταμού της;



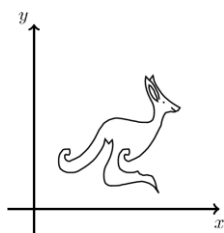
4. How many integers are greater than $2015 \cdot 2017$ but less than $2016 \cdot 2016$?

Πόσοι ακέραιοι είναι μεγαλύτεροι από το $2015 \cdot 2017$, αλλά μικρότεροι από το $2016 \cdot 2016$;

(A) 0 (B) 1 (C) 2015 (D) 2016 (E) 2017

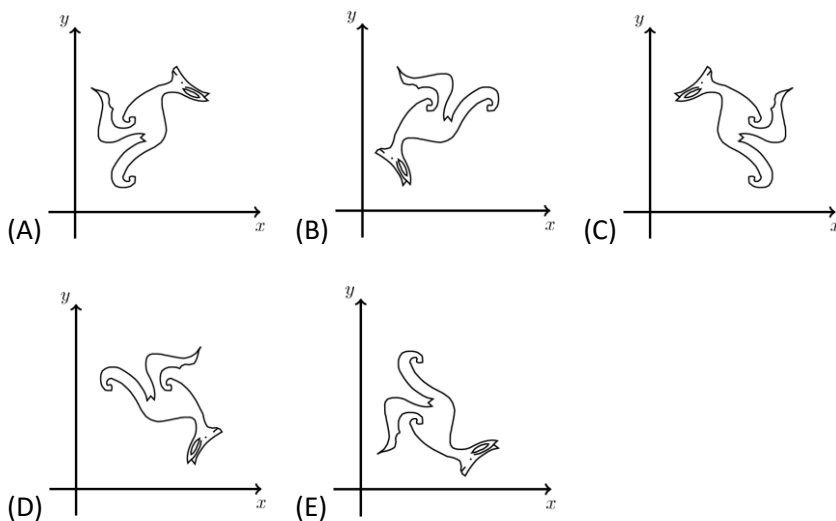
5. A set of points forms a picture of a kangaroo in the xy -plane as shown.

Ένα σύνολο σημείων διαμορφώνει την εικόνα ενός καγκουρό στο επίπεδο xy , όπως φαίνεται.



For each point the x and y coordinates are swapped. What is the result?

Για κάθε σημείο οι συντεταγμένες x και y εναλλάσσονται. Ποιο είναι το αποτέλεσμα;



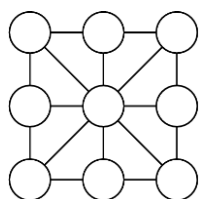
6. What is the smallest number of planes that are needed to enclose a bounded part in three-dimensional space?

Ποιος είναι ο μικρότερος αριθμός επιπέδων που είναι απαραίτητα για να φράξουν ένα μέρος του τρισδιάστατου χώρου;

- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

7. Diana wants to write nine integers into the circles on the diagram so that, for the eight small triangles whose vertices are joined by segments, the sums of the numbers in their vertices are identical. What is the largest number of different integers she can use?

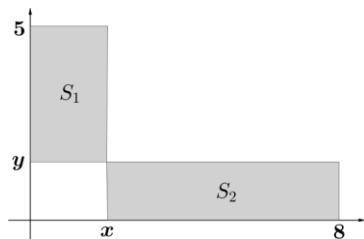
Η Diana θέλει να γράψει εννέα ακέραιους αριθμούς σε κύκλους στο διάγραμμα έτσι ώστε, για τα οκτώ μικρά τρίγωνα των οποίων οι κορυφές ενώνονται με ευθύγραμμα τμήματα, έχουν τα αθροίσματα των αριθμών στις κορυφές ίσα. Ποιος είναι ο μεγαλύτερος αριθμός των διαφορετικών ακεραίων που μπορεί να χρησιμοποιήσει;



- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 5 (E) 8

8. The rectangles S_1 and S_2 in the picture have the same area. Determine the ratio $\frac{x}{y}$.

Τα ορθογώνια S_1 και S_2 στην εικόνα έχουν το ίδιο εμβαδό. Βρείτε το λόγο $\frac{x}{y}$.



- (A) 1 (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\frac{4}{3}$ (D) $\frac{7}{4}$ (E) $\frac{8}{5}$

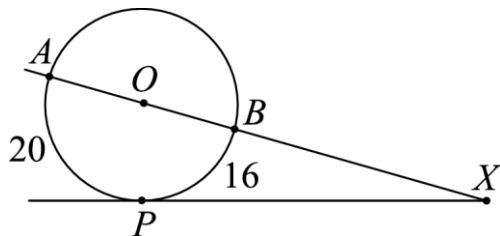
9. If $x^2 - 4x + 2 = 0$, then $x + \frac{2}{x}$ equals

Αν $x^2 - 4x + 2 = 0$, τότε το $x + \frac{2}{x}$ ισούται με

- (A) -4 (B) -2 (C) 0 (D) 2 (E) 4

10. The lengths of arc AP and arc BP in the figure are 20 and 16, respectively. Then the value of the angle $\angle AXP$ equals

Τα μήκη των τόξων AP και BP στο σχήμα είναι 20 και 16, αντίστοιχα. Η τιμή της γωνίας $\angle AXP$ ισούται



- (A) 30° (B) 24° (C) 18° (D) 15° (E) 10°

4 point problems (προβλήματα 4 μονάδων)

11. a, b, c, d are positive integers satisfying $a + 2 = b - 2 = c \cdot 2 = d : 2$.

Which is the largest of the four numbers a, b, c and d ?

Τα a, b, c, d είναι θετικοί ακέραιοι αριθμοί που ικανοποιούν τις $a + 2 = b - 2 = c \cdot 2 = d : 2$.

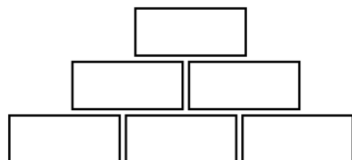
Ποιο είναι ο μεγαλύτερος από τους τέσσερις αριθμούς a, b, c και d ;

- (A) a (B) b (C) c

(D) d (E) This is not uniquely determined (δεν μπορεί να υπολογιστεί μοναδικά).

12. In this pyramid of numbers each upper field is the product of the two fields directly underneath. Which of the following numbers cannot appear in the top field, if the three bottom fields only contain natural numbers bigger than 1 ?

Σε αυτή την πυραμίδα των αριθμών κάθε άνω πεδίο είναι το γινόμενο των δύο πεδίων ακριβώς από κάτω. Ποιος από τους παρακάτω αριθμούς δεν μπορεί να εμφανίζεται στο πεδίο της κορυφής, αν τα τρία κάτω πεδία περιέχουν μόνο φυσικούς αριθμούς μεγαλύτερους από το 1;



- (A) 56 (B) 84 (C) 90 (D) 105 (E) 220

13. What is x_4 , if $x_1 = 2$ and $x_{n+1} = x_n^{x_n}$ for $n > 1$?

Τι είναι το x_4 , αν $x_1 = 2$ και $x_{n+1} = x_n^{x_n}$ για $n > 1$;

- (A) 2^{2^3} (B) 2^{2^4} (C) $2^{2^{11}}$ (D) $2^{2^{16}}$ (E) $2^{2^{768}}$

14. In rectangle $ABCD$ the length of the side \overline{BC} is half the length of the diagonal \overline{AC} . Let M be a point on CD such that $|\overline{AM}| = |\overline{MC}|$. What is the size of angle $\angle CAM$?

Σε ορθογώνιο $ABCD$ το μήκος της πλευράς \overline{BC} είναι το μισό του μήκους του της διαγώνιου \overline{AC} . Το M είναι ένα σημείο στην CD τέτοιο ώστε $|\overline{AM}| = |\overline{MC}|$. Ποιο είναι το μέγεθος της γωνίας $\angle CAM$;

- (A) 12.5° (B) 15° (C) 27.5° (D) 42.5° (E) some other angle (άλλη τιμή γωνίας)

15. Diana cut up a rectangle of area 2016 into 56 equal squares. The lengths of the sides of the rectangle and of the squares are integers. For how many different rectangles is it possible for her to do this?

Η Diana έκοψε ένα ορθογώνιο εμβαδού 2016 σε 56 ίσα τετράγωνα. Τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου και των τετραγώνων είναι ακέραιοι αριθμοί. Για πόσα διαφορετικά ορθογώνια είναι δυνατόν για αυτήν να το κάνει αυτό;

- (A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8 (E) 0

16. On the Island of Knights and Knaves every citizen is either a Knight (who always speaks the truth) or a Knave (who always lies). During your travel on the island you meet 7 people sitting around a bonfire. They all tell you "I'm sitting between two Knaves!" How many Knaves are there?

Στο νησί των Ιπποτών και Απατεώνων κάθε πολίτης είναι είτε ένα Ιππότης (που λέει πάντα την αλήθεια) ή Απατεώνας (που πάντα λέει ψέματα). Κατά τη διάρκεια της επίσκεψης σου στο νησί συναντάς 7 ανθρώπους που κάθονται γύρω από μια φωτιά. Όλοι σου λένε "κάθομαι ανάμεσα σε δύο Απατεώνες!" Πόσοι Απατεώνες υπάρχουν εκεί;

- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6

(E) more information is needed to determine this (χρειάζεται περισσότερη πληροφόρηση για να υπολογιστεί).

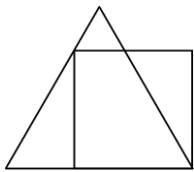
17. The equations $x^2 + ax + b = 0$ and $x^2 + bx + a = 0$ both have real roots. It is known that the sum of squares of the roots of the first equation is equal to the sum of squares of the roots of the second one, and $a < b$. Then $a + b$ equals,

Οι εξισώσεις $x^2 + ax + b = 0$ και $x^2 + bx + a = 0$, έχουν και οι δύο πραγματικές ρίζες. Είναι γνωστό ότι το άθροισμα των τετραγώνων των ριζών της πρώτης εξίσωσης είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των ριζών της δεύτερης, και $a < b$. Τότε το $a + b$ ισούται,

- (A) 0 (B) -2 (C) 4 (D) -4 (E) It is impossible to determine(είναι αδύνατο να υπολογιστεί).

18. If the perimeter of the square in the figure equals 4 then the perimeter of the equilateral triangle equals

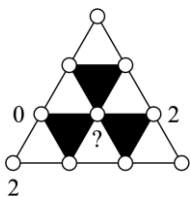
Αν η περίμετρος του τετραγώνου στην εικόνα ισούται με 4, τότε η περίμετρος του ισόπλευρου τριγώνου ισούται



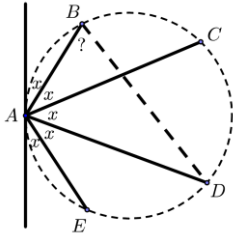
- (A) 4 (B) $3 + \sqrt{3}$ (C) 3 (D) $3 + \sqrt{2}$ (E) $4 + \sqrt{3}$

19. Each of ten points in the figure is marked with either 0 or 1 or 2. It is known that the sum of numbers in the vertices of any white triangle is divisible by 3, while the sum of numbers in the vertices of any black triangle is not divisible by 3. Three of the points are marked as shown in the figure. What numbers can be used to mark the central point ?

Κάθε ένα από τα δέκα σημεία στο σχήμα σημειώνεται με 0 ή 1 ή 2. Είναι γνωστό ότι το άθροισμα των αριθμών στις κορυφές του κάθε λευκού τριγώνου διαιρείται με το 3, ενώ το άθροισμα των αριθμών στις κορυφές του κάθε μαύρου τριγώνου δεν διαιρείται με το 3. Τρία από τα σημεία σημειώνονται όπως φαίνεται στο σχήμα. Ποιοι αριθμοί μπορούν να χρησιμοποιηθούν για το κεντρικό σημείο ?



- (A) Only 0. (B) Only 1. (C) Only 2. (D) Only 0 and 1. (E) Either 0 or 1 or 2.



20.

Betina draws five points A, B, C, D and E on a circle as well as the tangent to the circle at A , such that all five angles marked with x are equal. (Note that the drawing is not to scale.) How large is the angle $\angle ABD$?

Η Betina σημειώνει πέντε σημεία A, B, C, D και E σε ένα κύκλο, καθώς και την εφαπτομένη του κύκλου στο A , έτσι ώστε όλες οι πέντε γωνίες που σημειώνονται με x να είναι ίσες. (Σημειώστε ότι το σχέδιο δεν είναι σε κλίμακα.) Πόσο μεγάλη είναι η γωνία $\angle ABD$;

- (A) 66° (B) 70.5° (C) 72° (D) 75° (E) 77.5°

5 point problems (προβλήματα 5 μονάδων)

21. How many different solutions are there to the equation

Πόσες διαφορετικές λύσεις υπάρχουν για την εξίσωση

$$(x^2 - 4x + 5)^{x^2 + x - 30} = 1$$

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) infinitely many (άπειρες)

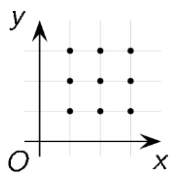
22. A quadrilateral contains an inscribed circle (i.e. a circle tangent to the four sides of the quadrilateral). The ratio of the perimeter of the quadrilateral to that of the circle is 4:3. Then the ratio of the area of the quadrilateral to that of the circle is:

Ένα τετράπλευρο περιέχει ένα εγγεγραμμένο κύκλο (κύκλος που εφάπτεται στις τέσσερις πλευρές του τετράπλευρου). Ο λόγος της περιμέτρου του τετράπλευρου με εκείνη του κύκλου είναι 4:3. Ο λόγος του εμβαδού του τετράπλευρου με εκείνου του κύκλου είναι:

- (A) $4 : \pi$ (B) $3\sqrt{2} : \pi$ (C) 16 : 9 (D) $\pi : 3$ (E) 4 : 3

23. How many quadratic functions in x have a graph passing through at least 3 of the marked points?

Πόσες συναρτήσεις του x δευτέρου βαθμού έχουν γραφική παράσταση που διέρχεται από τουλάχιστον 3 από τα σημεία που φαίνονται;



- (A) 6 (B) 15 (C) 19 (D) 22 (E) 27

24. In a right-angled triangle ABC (right angle at A) the bisectors of the acute angles intersect at point P . If the distance from P to the hypotenuse is $\sqrt{8}$, what is the distance from P to A ?

Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ABC (ορθή γωνία στο A) οι διχοτόμοι των οξείων γωνιών τέμνονται στο σημείο P . Αν η απόσταση από το P προς την υποτείνουσα είναι $\sqrt{8}$, ποια είναι η απόσταση από το P στο A ;

- (A) 8 (B) 3 (C) $\sqrt{10}$ (D) $\sqrt{12}$ (E) 4

25. Three three-digit numbers are formed from digits from 1 to 9 (each digit is used exactly once). Which of the following numbers couldn't be equal to the sum of these three numbers?

Τρεις τριψήφιοι αριθμοί σχηματίζονται με ψηφία από το 1 έως 9 (κάθε ψηφίο χρησιμοποιείται ακριβώς μια φορά). Ποιος από τους παρακάτω αριθμούς δεν θα μπορούσε να είναι ίσος με το άθροισμα των τριών αυτών αριθμών;

- (A) 1500 (B) 1503 (C) 1512 (D) 1521 (E) 1575

26. A cube is dissected into 6 pyramids by connecting a given point in the interior of the cube with each vertex of the cube. The volumes of five of these pyramids are 2, 5, 10, 11 and 14. What is the volume of the sixth pyramid?

Ένας κύβος τεμαχίζεται σε 6 πυραμίδες συνδέοντας ένα δεδομένο σημείο στο εσωτερικό του κύβου με κάθε κορυφή του κύβου. Οι όγκοι των πέντε πυραμίδων είναι 2, 5, 10, 11 και 14. Ποιος είναι ο όγκος της έκτης πυραμίδας;

- (A) 1 (B) 4 (C) 6 (D) 9 (E) 12

27. Jakob wrote down four consecutive positive integers. He then calculated the four possible totals made by taking three of the integers at a time. None of these totals was a prime. What is the smallest integer Jakob could have written?

Ο Jakob έγραψε τέσσερις διαδοχικούς θετικούς ακέραιους. Στη συνέχεια υπολόγισε τα τέσσερα πιθανά αθροίσματα παίρνοντας τρεις από τους ακέραιους κάθε φορά. Κανένα από αυτά τα αθροίσματα ήταν πρώτος αριθμός. Ποιος είναι ο μικρότερος ακέραιος που ο Jakob θα μπορούσε να γράψει;

- (A) 12 (B) 10 (C) 7 (D) 6 (E) 3

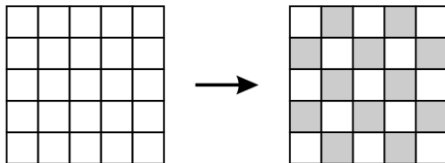
28. Ann chose a positive integer n and wrote down the sum of all positive integers from 1 to n . A prime number p divides the sum, but not any of the summands. Which of the following could be $n + p$?

Η Ann επέλεξε ένα θετικό ακέραιο n και έγραψε το άθροισμα όλων των θετικών ακεραίων από 1 έως n . Ένας πρώτος αριθμός p διαιρεί το άθροισμα, αλλά κανένα από τους όρους του αθροίσματος. Ποιο από τα παρακάτω θα μπορούσε να είναι η τιμή του $n + p$;

- (A) 217 (B) 221 (C) 229 (D) 245 (E) 269

29. Consider a 5×5 square divided into 25 cells. Initially all its cells are white. In each move it is allowed to change the color of any three consecutive cells in a row or in a column to the opposite color (i.e. white cells become black and black ones become white). What is the smallest possible number of moves needed to obtain the chessboard coloring shown in the figure?

Σκεφτείτε ένα τετράγωνο 5×5 που διαιρείται σε 25 κυψέλες. Αρχικά όλες οι κυψέλες του είναι λευκές. Σε κάθε κίνηση υπάρχει η δυνατότητα να αλλάξει το χρώμα των οποιωνδήποτε τριών διαδοχικών κυψελών σε μια γραμμή ή σε μια στήλη με το αντίθετο χρώμα (δηλαδή λευκές κυψέλες γίνονται μαύρες και μαύρες γίνονται λευκές). Ποιος είναι ο μικρότερος δυνατός αριθμός κινήσεων που απαιτούνται για να πάρουμε τη χρωματιστή σκακιέρα όπως φαίνεται στο σχήμα;



- (A) less than 10(λιγότερο από 10)
- (B) 10
- (C) 12
- (D) more than 12(περισσότερες από 12)
- (E) It is impossible to do(δεν είναι δυνατό να κατασκευαστεί).

30. The positive integer N has exactly six distinct (positive) divisors including 1 and N . The product of five of these is 648. Which one of the following is the sixth divisor of N ?

Ο θετικός ακέραιος N έχει ακριβώς έξι διακριτούς (θετικούς) διαιρέτες συμπεριλαμβανομένων των 1 και N . Το γινόμενο πέντε από αυτούς είναι 648. Ποιος από τους παρακάτω είναι ο έκτος διαιρέτης του N ;

- (A) 4 (B) 8 (C) 9 (D) 12 (E) 24