

KANGOUROU MATHEMATICS

LEVEL 11 – 12
Β' - Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

23 ΜΑΡΤΙΟΥ / MARCH 2013
10:00-11:15

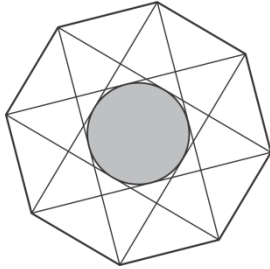
Questions 1-10: 3 points
Questions 11-20: 4 points
Questions 21-30: 5 points

3 point problems(προβλήματα 3 μονάδων)

1. Which of the following numbers is the largest?

Ποιο από τους πιο κάτω αριθμούς είναι ο πιο μεγάλος;

- (A) 2013 (B) 2^{0+13} (C) 20^{13} (D) 201^3 (E) $20 \cdot 13$



2.

The regular octagon of the figure measures 10 on each side. Which is the measure of the radius of the circle inscribed in the smallest octagon formed by the diagonals?

Το μήκος της κάθε πλευράς στο κανονικό οκτάγωνο του σχήματος είναι 10. Ποια είναι η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου στο μικρότερο οκτάγωνο που σχηματίζεται από τις διαγώνιους;

- (A) 10 (B) 7,5 (C) 5 (D) 2,5 (E) 2

3. A prism has 2013 faces in total. How many edges has the prism?

Ένα πρίσμα έχει συνολικά 2013 έδρες. Πόσες ακμές έχει το πρίσμα;

- (A) 2011 (B) 2013 (C) 4022 (D) 4024 (E) 6033

4. The cube root of 3^{3^3} is equal to

Η κυβική ρίζα του 3^{3^3} ισούται με

- (A) 3^3 (B) 3^{3^3-1} (C) 3^{2^3} (D) 3^{3^2} (E) $(\sqrt{3})^3$

5. The year 2013 has the property that its number is made up of the consecutive digits 0, 1, 2 and 3.

How many years have passed since the last time a year was made up of four consecutive digits?

Το έτος 2013 έχει την ιδιότητα ότι ο αριθμός δημιουργήθηκε από τα διαδοχικά ψηφία 0, 1, 2 και 3. Πόσα χρόνια πέρασαν από την προηγούμενη φορά που μια χρονολογία είχε τέσσερα διαδοχικά ψηφία ;

- (A) 467 (B) 527 (C) 581 (D) 693 (E) 990

6. Let f be a linear function for which $f(2013) - f(2001) = 100$. What is $f(2031) - f(2013)$?

Έστω το f γραμμική συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(2013) - f(2001) = 100$. Ποια η τιμή του $f(2031) - f(2013)$;

- (A) 75 (B) 100 (C) 120 (D) 150 (E) 180

7. Given that $2 < x < 3$ how many of the following statements are true?

Δεδομένου ότι $2 < x < 3$ πόσες από τις πιο κάτω σχέσεις ισχύουν;

$$4 < x^2 < 9 \quad 4 < 2x < 9 \quad 6 < 3x < 9 \quad 0 < x^2 - 2x < 3$$

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

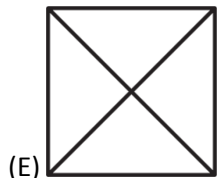
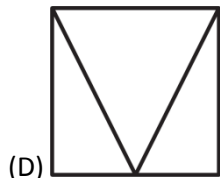
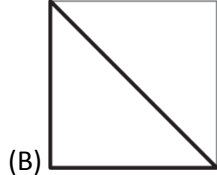
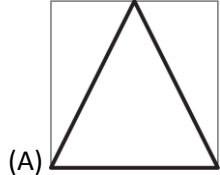
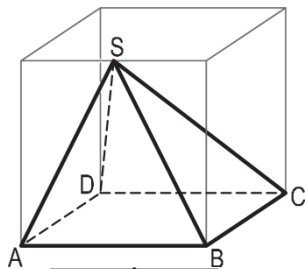
8. Six superheroes capture 20 villains. The first superhero captures one villain, the second captures two villains and the third captures three villains. The fourth superhero captures more villains than any of the other five. What is the smallest number of villains the fourth superhero must have captured?

Έξι ήρωες συλλαμβάνουν 20 κακοποιούς. Ο πρώτος ήρωας συλλαμβάνει ένα κακοποιό, ο δεύτερος συλλαμβάνει δύο κακοποιούς και ο τρίτος συλλαμβάνει τρεις κακοποιούς. Ο τέταρτος ήρωας συλλαμβάνει περισσότερους κακοποιούς από οποιονδήποτε από τους άλλους πέντε. Ποιος είναι ο μικρότερος αριθμός κακοποιών που ο τέταρτος ήρωας θα πρέπει να έχει συλλάβει;

(A) 7 (B) 6 (C) 5 (D) 4 (E) 3

9. In the cube below you see a solid not transparent pyramid $ABCD S$ with base $ABCD$, whose vertex S lies exactly in the middle of an edge of the cube. You look at this pyramid from above, from below, from behind, from ahead, from the right and from the left. Which view does not arise?

Μέσα στον πιο κάτω κύβο βλέπεις μια αδιαφανή πυραμίδα $ABCD S$ με βάση $ABCD$, που η κορυφή του S βρίσκεται ακριβώς στη μέση μιας ακμής του κύβου. Κοιτάζεις αυτή την πυραμίδα από πάνω, από κάτω, από πίσω, από μπροστά, από δεξιά και από αριστερά. Ποια όψη δεν φαίνεται;



10. When a certain solid substance melts, its volume increases by $\frac{1}{12}$. By how much does its volume decrease when it solidifies again?

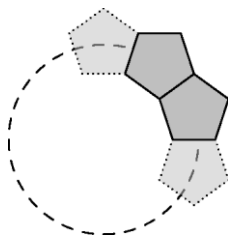
Όταν μια στερεά ουσία λιώνει, ο όγκος του αυξάνεται κατά $\frac{1}{12}$. Πόσο μειώνεται ο όγκος όταν στερεοποιείται ξανά;

- (A) $\frac{1}{10}$ (B) $\frac{1}{11}$ (C) $\frac{1}{12}$ (D) $\frac{1}{13}$ (E) $\frac{1}{14}$

4 point problems(προβλήματα 4 μονάδων)

11. Radu has identical plastic pieces in the shape of a regular pentagon. He glues them edge to edge to complete a circle, as shown in the picture. How many pentagon pieces are there in this circle?

Ο Radu έχει ίδια μεταξύ τους πλαστικά κομμάτια σε σχήμα κανονικού πενταγώνου. Τα κολλά πλευρά με πλευρά για να σχηματίσει ένα κύκλο, όπως φαίνεται στην εικόνα. Πόσα πενταγωνικά κομμάτια θα έχει ο κύκλος;



- (A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 12 (E) 15

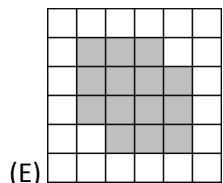
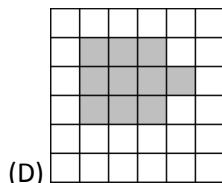
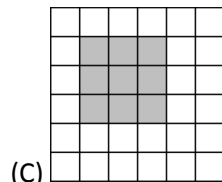
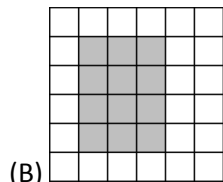
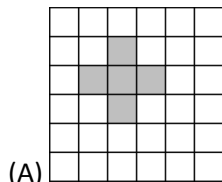
12. How many positive integers n exist such that both $\frac{n}{3}$ and $3n$ are three digit integers?

Πόσους θετικοί ακέραιοι n υπάρχουν ώστε τα $\frac{n}{3}$ και $3n$ είναι τριψήφιοι ακέραιοι;

- (A) 12 (B) 33 (C) 34 (D) 100 (E) 300

13. A circular carpet is placed on a floor of square tiles. All the tiles which have more than one point in common with the carpet are marked grey. Which of the following is an impossible outcome?

Ένα κυκλικό ταπέτο τοποθετείται σε δάπεδο με τετράγωνα μαρμαράκια. Όλα τα μαρμαράκια που έχουν περισσότερα από ένα κοινό σημείο με το ταπέτο σημειώνονται με γκριζό χρώμα. Ποιο από τα πιο κάτω είναι αδύνατο αποτέλεσμα;



14. Consider the following proposition about a function f on the set of integers: "For any even x , $f(x)$ is even." What would be the negation of this proposition?

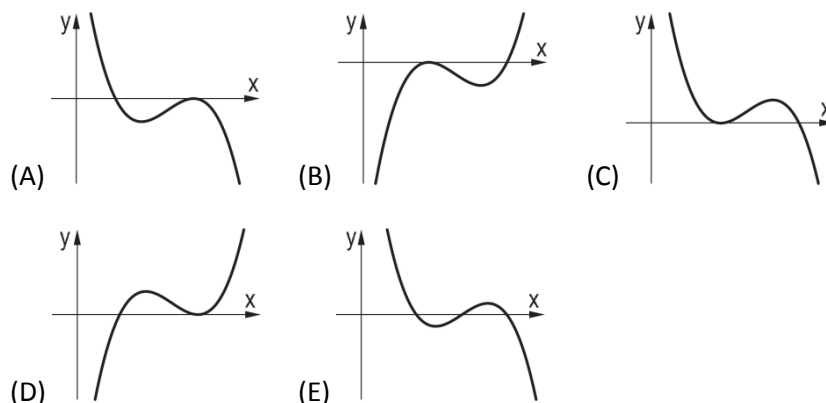
- (A) For any even x , $f(x)$ is odd
- (B) For any odd x , $f(x)$ is even
- (C) For any odd x , $f(x)$ is odd
- (D) There exists an even number x such that $f(x)$ is odd
- (E) There exists an odd number x such that $f(x)$ is odd

Εξέτασε την εξής πρόταση για τη συνάρτηση f πάνω στο σύνολο των ακεραίων: "Για κάθε άρτιο x , $f(x)$ είναι άρτια." Ποια θα είναι η άρνηση της πρότασης;

- (A) Για κάθε άρτιο x , $f(x)$ είναι περιττή
- (B) Για κάθε περιττό x , $f(x)$ είναι άρτια
- (C) Για κάθε περιττό x , $f(x)$ είναι περιττή
- (D) Υπάρχει άρτιος αριθμός x ώστε $f(x)$ είναι περιττή
- (E) Υπάρχει περιττός αριθμός x ώστε $f(x)$ είναι περιττή

15. Given a function $W(x) = (a - x)(b - x)^2$, where $a < b$. Its graph is in one of the following figures. In which one?

Δίδεται συνάρτηση $W(x) = (a - x)(b - x)^2$, όπου $a < b$. Η γραφική της παράσταση βρίσκεται σε ένα από τα πιο κάτω. Σε ποιά;



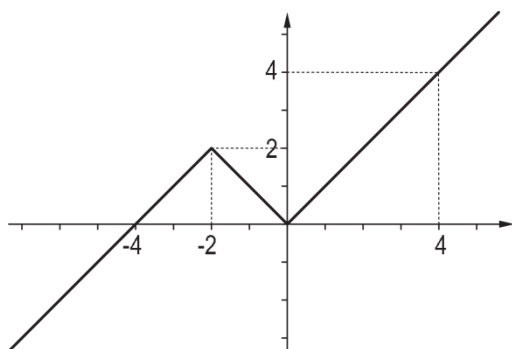
16. Consider a rectangle, one of whose sides has length 5. The rectangle can be cut into a square and a rectangle, one of which has the area 4. How many such rectangles exist?

Έχουμε ορθογώνιο, με μια από τις πλευρές του μήκους 5. Το ορθογώνιο μπορεί να μοιραστεί σε τετράγωνο και ορθογώνιο, ένα από τα οποία έχει εμβαδό 4. Πόσα τέτοια ορθογώνια υπάρχουν;

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

17. Vlad has drawn the graph of a function $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, composed of two half-lines and a line segment (see figure). How many solutions does the equation $f(f(f(x))) = 0$ have?

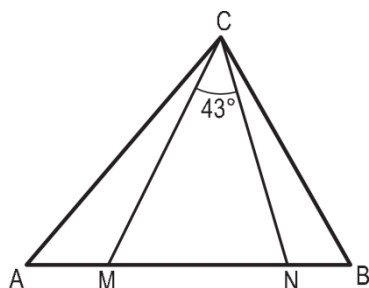
Ο Vlad σχεδίασε τη γραφική παράσταση του $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία αποτελείται από δύο ημι-ευθείες και ένα ευθύγραμμο τμήμα (βλέπε το σχήμα). Πόσες λύσεις έχει η εξίσωση $f(f(f(x))) = 0$;



- (A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1 (E) 0

18. In the triangle ABC the points M and N on the side AB are such that $AN = AC$ and $BM = BC$. Find $\angle ACB$ if $\angle MCN = 43^\circ$.

Στο τρίγωνο ABC τα σημεία M και N στην πλευρά AB είναι τέτοια ώστε $AN = AC$ και $BM = BC$. Να βρεθεί η $\angle ACB$ αν $\angle MCN = 43^\circ$.



- (A) 86° (B) 89° (C) 90° (D) 92° (E) 94°

19. How many pairs (x, y) of positive integers satisfy the equation $x^2 y^3 = 6^{12}$?

Πόσα ζεύγη (x, y) θετικών ακραίων αριθμών ικανοποιούν την εξίσωση $x^2 y^3 = 6^{12}$;

- (A) 6 (B) 8 (C) 10 (D) 12 (E) Another number (άλλος αριθμός).

20. A box contains 900 cards numbered from 100 to 999. No two cards have the same numbers. François picks some cards and determines the sum of the digits on each of them. At least how many cards must he pick in order to be certain to have three cards with the same sum?

Ένα κουτί περιέχει 900 κάρτες αριθμημένες από το 100 μέχρι το 999. Δεν υπάρχουν δύο κάρτες με τους ίδιους αριθμούς. Ο François επιλέγει μερικές κάρτες και υπολογίζει το άθροισμα των ψηφίων τους. Τουλάχιστο πόσες κάρτες πρέπει να επιλέξει ώστε να έχει τρεις κάρτες με το ίδιο άθροισμα;

- (A) 51 (B) 52 (C) 53 (D) 54 (E) 55

5 point problems(προβλήματα 5 μονάδων)

21. How many pairs (x, y) of integers with $x \leq y$ exist such that their product equals 5 times their sum?

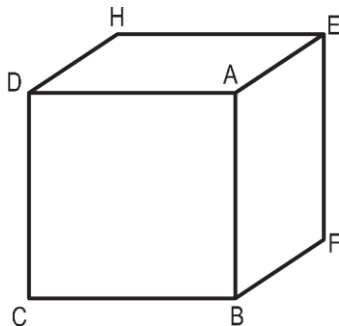
Πόσα ζεύγη (x, y) ακεραίων με $x \leq y$ υπάρχουν ώστε το γινόμενο τους να ισούται με 5 φορές το άθροισμα τους;

- (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

22. Let $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be the function defined by the following properties: f is periodic with period 5 and the restriction of f to $[-2, 3[$ is $x \mapsto f(x) = x^2$. What is $f(2013)$?

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η συνάρτηση που ορίζεται με τις εξής ιδιότητες: f είναι περιοδική με περίοδο 5 και ο περιορισμός του f στο $[-2, 3[$ είναι $x \mapsto f(x) = x^2$. Ποια η τιμή του $f(2013)$;

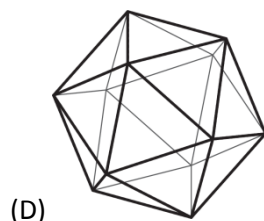
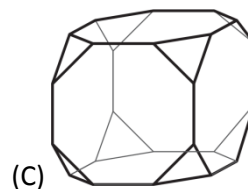
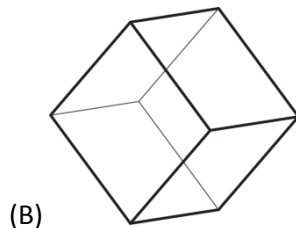
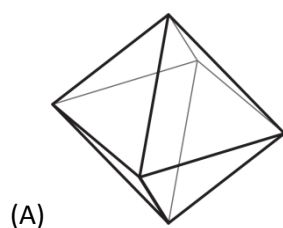
- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4 (E) 9



23.

The solid cube in the figure is cut by a plane passing through the three neighbouring vertices D, E and B of A. Similarly the cube is cut by planes passing through the three neighbouring vertices of all other seven corners. What will the piece containing the center of the cube look like?

Ο στερεός κύβος στο σχήμα κόβεται από επίπεδο που περνά από τρεις γειτονικές κορυφές D, E και B του A. Παρομοίως ο κύβος κόβεται με επίπεδα που περνούν από γειτονικές κορυφές όλων των άλλων επτά κορυφών. Πώς θα φαίνεται το κομμάτι που περιέχει το κέντρο του κύβου;



(E) The center of the cube belongs to several pieces.

(E) Το κέντρο του κύβου ανήκει σε περισσότερα κομμάτια

24. How many solutions (x, y) , where x and y are real numbers, does the equation $x^2 + y^2 = |x| + |y|$ have?

Πόσες λύσεις (x, y) , όπου x και y είναι πραγματικοί αριθμοί, έχει η εξίσωση $x^2 + y^2 = |x| + |y|$;

- (A) 1 (B) 5 (C) 8 (D) 9 (E) Infinitely many (άπειρες).

25. Let $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ be the function defined by $f(n) = \frac{n}{2}$ if n is even, $f(n) = \frac{n-1}{2}$ if n is odd, for all natural number n . For k a positive integer $f^k(n)$ denotes the number represented by the expression $f(f(\dots f(n) \dots))$, where the symbol f appears k times. The number of solutions of the equation $f^{2013}(n) = 1$ is

Έστω $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ η συνάρτηση που ορίζεται $f(n) = \frac{n}{2}$ όταν το n είναι άρτιο, $f(n) = \frac{n-1}{2}$ όταν το n είναι περιττός, για όλους τους φυσικούς n . Για θετικό ακέραιο αριθμό k $f^k(n)$ συμβολίζει τον αριθμό που εκπροσωπείται με την έκφραση $f(f(\dots f(n) \dots))$, όπου το σύμβολο f εμφανίζεται k φορές. Ο αριθμός των λύσεων της εξίσωσης $f^{2013}(n) = 1$ είναι

- (A) 0 (B) 4026 (C) 2^{2012} (D) 2^{2013} (E) infinite

26. There are some straight lines drawn on the plane. Line a intersects exactly three other lines and line b intersects exactly four other lines. Line c intersects exactly n other lines, with $n \neq 3, 4$. Determine the number of lines drawn on the plane.

Υπάρχουν μερικές ευθείες γραμμές σχεδιασμένες στο επίπεδο. Η ευθεία a τέμνει ακριβώς τρεις άλλες ευθείες και η ευθεία b τέμνει ακριβώς τέσσερις άλλες ευθείες. Η ευθεία c τέμνει ακριβώς άλλες n ευθείες, με $n \neq 3, 4$. Να βρεθεί ο αριθμός ευθειών που σχεδιάστηκαν στο επίπεδο.

- (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) Another number(άλλος αριθμός).

27. The sum of the first n positive integers is a three-digit number in which all of the digits are the same. What is the sum of the digits of n ?

Το άθροισμα των πρώτων n θετικών ακέραιων αριθμών είναι ένας τριψήφιος αριθμός του οποίου όλα τα ψηφία είναι τα ίδια. Ποιο είναι το άθροισμα των ψηφίων του n ;

- (A) 6 (B) 9 (C) 12 (D) 15 (E) 18

28. On the island of Knights and Knaves there live only two types of people: Knights (who always speak the truth) and Knaves (who always lie). I met two men who lived there and asked the taller man if they were both Knights. He replied, but I could not figure out what they were, so I asked the shorter man if the taller was a Knight. He replied, and after that I knew which type they were. Were the men Knights or Knaves?

- (A) They were both Knights.
- (B) They were both Knaves.
- (C) The taller was a Knight and the shorter was a Knave.
- (D) The taller was a Knave and the shorter was a Knight.
- (E) Not enough information is given.

Στο νησί των Knights και των Knaves ζουν μόνο δύο είδη ανθρώπων: οι Knights (οι οποίοι πάντα λένε την αλήθεια) και οι Knaves (που πάντα λένε ψέματα). Συνάντησα δύο άνδρες που έζησαν εκεί και ρώτησα τον ψηλότερο άνδρα αν ήταν και οι δύο Knights. Απάντησε, αλλά δεν μπορούσα να καταλάβω τι ήταν, έτσι ρώτησα τον κοντό άνδρα κατά πόσο ο ψηλότερος ήταν ένας Knight. Απάντησε, και μετά ήξερα τι ήταν και οι δύο. Ήταν οι άνδρες Knights ή Knaves;

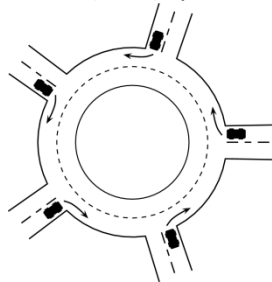
- (A) Ήταν και οι δύο Knights.
- (B) Ήταν και οι δύο Knaves.
- (C) Ο ψηλότερος ήταν Knight και ο κοντός ήταν Knave.
- (D) Ο ψηλότερος ήταν Knave και ο κοντός ήταν Knight.
- (E) Δεν δίδεται αρκετή πληροφορία.

29. Iulian has written an algorithm in order to create a sequence of numbers as $a_1 = 1$, $a_{m+n} = a_m + a_n + mn$, where m and n are natural numbers. Find the value of a_{100}
Ο Iulian έγραψε ένα αλγόριθμο για να δημιουργήσει μια ακολουθία αριθμών όπως $a_1 = 1$, $a_{m+n} = a_m + a_n + mn$, όπου m και n είναι φυσικοί αριθμοί. Να βρεθεί η τιμή του a_{100}

- (A) 100 (B) 1000 (C) 2012 (D) 4950 (E) 5050

30. The roundabout shown in the picture is entered by 5 cars at the same time, each one from a different entrance, as shown on the figure. Each of the cars drives less than one round and no two cars leave the roundabout in the same direction. How many different combinations are there for the cars leaving the roundabout?

Πέντε αυτοκίνητα εισέρχονται σε κυκλοφοριακό κόμβο την ίδια στιγμή, το καθένα από διαφορετική είσοδο, όπως φαίνεται στο διάγραμμα. Το κάθε αυτοκίνητο κινείται λιγότερο από μια στροφή στον κυκλοφοριακό κόμβο, και δεν υπάρχουν δύο αυτοκίνητα που να εξέρχονται στην ίδια έξοδο. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν τα αυτοκίνητα να εξέλθουν από τον κυκλοφοριακό κόμβο;



- (A) 24 (B) 44 (C) 60 (D) 81 (E) 120