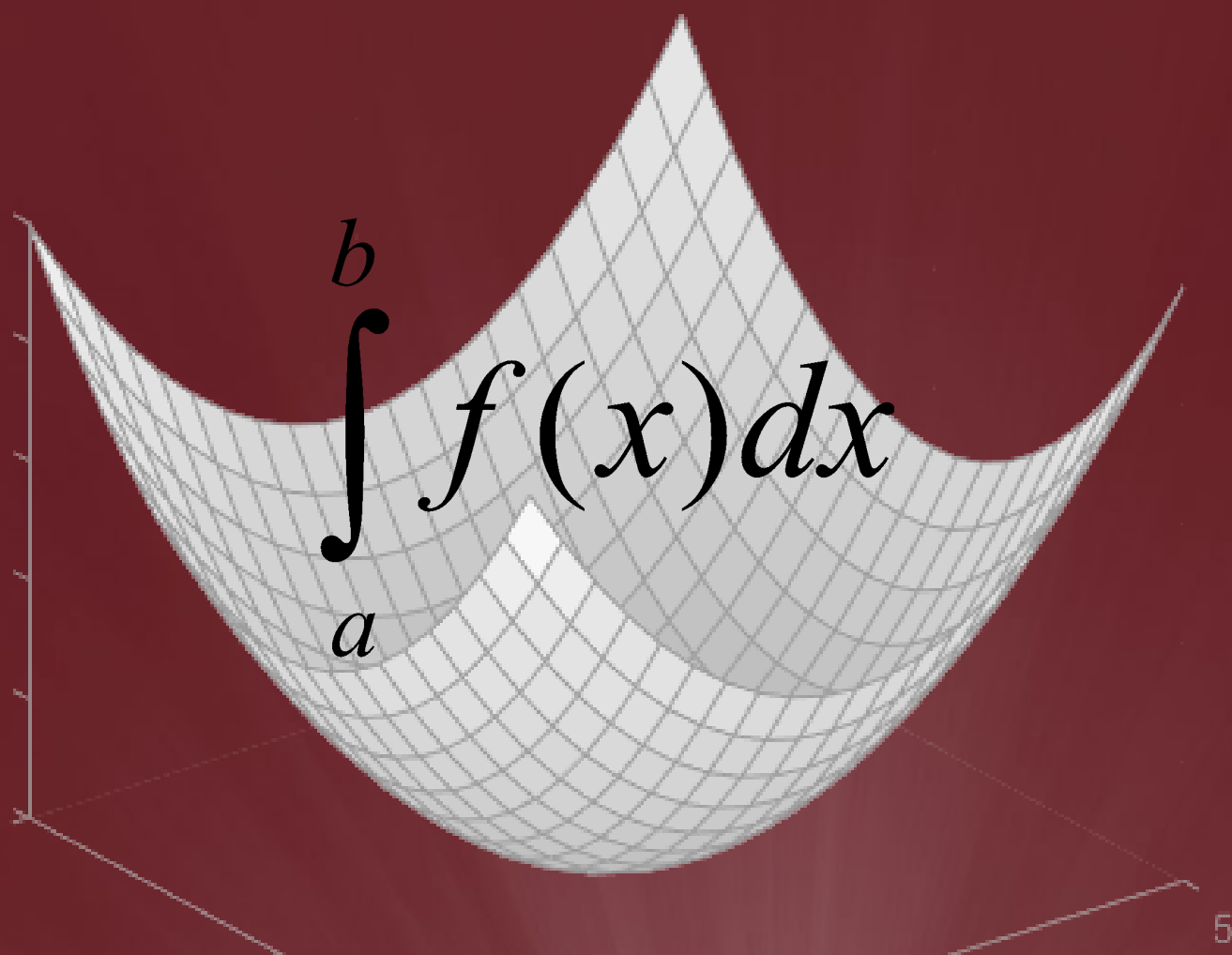


Μαθηματικοί Διαγωνισμοί για Μαθητές Λυκείου

Α' ΤΕΥΧΟΣ– ΑΛΓΕΒΡΑ



Δάτης Καλάλη

Πρόλογος

Αγαπητέ αναγνώστη,

Η ιδέα για τη συγγραφή αυτού του βιβλίου προέκυψε από τη διαπίστωση ότι πολλοί μαθητές λαμβάνουν μέρος σε διαγωνισμούς και ολυμπιάδες στα μαθηματικά. Έτσι, το παρόν βιβλίο έχει στόχο να βοηθήσει τους μαθητές που αγαπούν τα μαθηματικά και επιθυμούν να βελτιώσουν ακόμη περισσότερο τη επίδοσή τους, για να συμμετέχουν με επιτυχία σε μαθηματικούς διαγωνισμούς.

Το παρόν βιβλίο εστιάζει στο μάθημα της Άλγεβρας και πιο συγκεκριμένα στα κεφάλαια των συναρτησιακών εξισώσεων, των ανισοτήτων και των πολυωνύμων. Ο μαθητής κατά τη μελέτη πρέπει να διαθέτει υπομονή και να αφιερώνει χρόνο στην επίλυση των ασκήσεων και να μην παραιτείται με την πρώτη δυσκολία.

Στο σημείο αυτό, θα ήταν παράλειψη μου να μην ευχαριστήσω τον έντιμο καθηγητή μου, τον Δρ. Δημήτρη Χριστοφίδη για την ανάγνωση του βιβλίου και τις χρήσιμες συμβουλές του. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον φιλόλογο κ. Στέλιο Οικονομίδα για την ανάγνωση και τις συμβουλές του για τον πρόλογο του βιβλίου. Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω τη μητέρα μου για τη συνεχή φροντίδα και υποστήριξή της.

Για οποιεσδήποτε περαιτέρω διευκρινίσεις, απορίες, συμβουλές ή σχόλια, μην διστάσεις να επικοινωνήσεις μαζί μου στην ηλεκτρονική διεύθυνση : olympiadb@yahoo.com

Με την ελπίδα ότι αυτό το βιβλίο θα αποτελέσει σημαντικό βοήθημα για την επιτυχία των μαθητών της Κύπρου σε διεθνείς διαγωνισμούς, καλή ανάγνωση και καλό ταξίδι στον όμορφο κόσμο των μαθηματικών!

Ο συγγραφέας,

Δάτης Καλάλη.

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: Συναρτήσεις

Εισαγωγή-----	Σελ.4-5
1-A: Συναρτησιακές εξισώσεις-----	Σελ.6-10
Προβλήματα-----	Σελ.11-13
Λύσεις προβλημάτων-----	Σελ.14-26

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: Ανισότητες

2A- Βασικές ανισότητες-----	Σελ.27-32
2B- Τρόποι επίλυσης ανισοτήτων-----	Σελ.33-38
2Γ- Η χρήση των συναρτήσεων στις ανισότητες-----	Σελ.39-41
Προβλήματα-----	Σελ.42-45
Λύσεις προβλημάτων-----	Σελ. 45-62

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: Πολυώνυμα

Εισαγωγή-----	Σελ.63
2A- Μιγαδικοί αριθμοί-----	Σελ.64-65
2B- Οι ρίζες του Πολυωνύμου-----	Σελ.66-67
2Γ- Πολυώνυμα με ακέραιες συντελεστές-----	Σελ.68-70
Προβλήματα-----	Σελ.71-72
Λύσεις προβλημάτων-----	Σελ.73-89

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: Συναρτήσεις

Εισαγωγή στις συναρτήσεις

Βασικοί Ορισμοί: Για δύο σύνολα A και B μπορούμε να συνδέουμε τα στοιχεία και να γράφουμε μία σχέση από ένα σύνολο προς το άλλο. Μια σχέση $A \rightarrow B$, δηλαδή από το σύνολο A προς το σύνολο B λέγεται συνάρτηση, αν κάθε στοιχείο του A συνδέεται με μόνο ένα στοιχείο του συνόλου B .

Το σύνολο A ονομάζεται το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

Το σύνολο B ονομάζεται πεδίο τιμών.

Συμβολίζουμε μια συνάρτηση με $f(x)$, όπου οι δυνατές τιμές του x είναι το πεδίο ορισμού (σύνολο A) και οι δυνατές τιμές του $f(x)$ είναι το πεδίο τιμών (σύνολο B).

Μία συνάρτηση λέγεται ένα προς ένα, όταν αντιστοιχίζει διαφορετικά στοιχεία του πεδίου ορισμού A σε διαφορετικά στοιχεία του πεδίου τιμών B .

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = x^2$ δεν είναι ένα προς ένα αφού $f(x) = f(-x) = x^2$

Γενικά, η συνάρτηση $f: A \rightarrow B$ είναι ένα προς ένα αν για κάθε $x, y \in A$ έτσι ώστε $f(x) = f(y)$ έχουμε $x = y$.

Παράδειγμα: Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^3 + x + 1$ είναι ένα προς ένα.

Λύση: Έστω ότι x και y είναι δύο πραγματικοί αριθμοί έτσι ώστε $f(x) = f(y)$

Έχουμε ότι $x^3 + x + 1 = y^3 + y + 1$

$$\Rightarrow x^3 + x = y^3 + y \Rightarrow x^3 - y^3 = y - x$$

$$\Rightarrow (x - y)(x^2 - xy + y^2) = -(x - y)$$

Τώρα, αν $x \neq y$ πρέπει να έχουμε $x^2 - xy + y^2 = -1$ δηλαδή $x^2 + y^2 + (x - y)^2 = -2$ που είναι άτοπο. Άρα $x = y$, δηλαδή η συνάρτηση είναι ένα προς ένα.

Αύξουσες και φθίνουσες συναρτήσεις

Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow B$ είναι αύξουσα αν για κάθε $x, y \in A$ έτσι ώστε $x \geq y$ έχουμε $f(x) \geq f(y)$ και μία συνάρτηση $f: A \rightarrow B$ είναι φθίνουσα αν για κάθε $x, y \in A$ έτσι ώστε $x \geq y$ έχουμε $f(x) \leq f(y)$.

Η παράγωγος μιας συνάρτησης $f: A \rightarrow B$ σε ένα σημείο a είναι η κλίση της ευθείας που είναι εφαπτόμενη στην καμπύλη της συνάρτησης σε αυτό το σημείο. Η παράγωγος της $f(x)$ συμβολίζεται με $f'(x)$ ή με $\frac{d}{dx}(f)$

Θεώρημα : Ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

- 1) Αν $f(x) = ax^k$ τότε $f'(x) = akx^{k-1}$
- 2) $\frac{d}{dx}(f(x) \pm g(x)) = f'(x) \pm g'(x)$
- 3) $\frac{d}{dx}(f(x) \cdot g(x)) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$
- 4) $\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$
- 5) $\frac{d}{dx}(f(g(x))) = f'(g(x))g'(x)$
- 6) $\frac{d}{dx}(a^{f(x)}) = \ln a \cdot f'(x) \cdot a^{f(x)}$

Οι χρήσεις του παραγώγου

Δίνεται η συνάρτηση $f: A \rightarrow R$ όπου $A \subseteq R$ είναι διάστημα

Αν $f'(x) \geq 0 \forall x \in A$ τότε f είναι αύξουσα.

Αν $f'(x) \leq 0 \forall x \in A$ τότε f είναι φθίνουσα.

Επί συναρτήσεις

Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow B$ λέγεται επί εαν μπορεί να πιάνει όλες τις τιμές του B . Δηλαδή $\forall y \in B, \exists x \in A$ έτσι ώστε $f(x) = y$

Περιοδικές συναρτήσεις

Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow B$ λέγεται περιοδική εάν υπάρχει αριθμός T , έτσι ώστε $f(x) = f(x + T) \forall x \in A$

1Α Συναρτησιακές εξισώσεις

Μια συναρτησιακή εξίσωση είναι μια εξίσωση που έχει ως άγνωστους κάποιες συναρτήσεις. Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x) = 2^x$ είναι μια λύση της συναρτησιακής εξίσωσης $f(x+y) = f(x)f(y)$, αφού $2^{x+y} = 2^x 2^y$. Αλλά η συνάρτηση $f(x) = 3^x$ είναι επίσης λύση της εξίσωσης. Συνήθως ο σκοπός είναι να βρούμε όλες τις συναρτήσεις που ικανοποιούν την εξίσωση.

Η επίλυση συναρτησιακών εξισώσεων

Κατηγορία 1: Κλασσικές συναρτησιακές εξισώσεις

Θα μελετήσουμε το παρακάτω παράδειγμα για να δούμε τις μεθόδους που χρησιμοποιούμε στην επίλυση κλασσικών συναρτησιακών εξισώσεων.

Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f: R \rightarrow R$ που ικανοποιούν την εξίσωση

$$f(2f(x) + f(y)) = 2x + f(y) \text{ για κάθε } x, y \in R$$

Πρώτα αντικαθιστούμε $x \rightarrow y$, $y \rightarrow x$ και έχουμε

$$f(2f(y) + f(x)) = 2y + f(x)$$

Τώρα θα δείξουμε ότι η συνάρτηση είναι ένα προς ένα

$$\text{Θέτουμε } f(a) = f(b)$$

$$\Rightarrow 2f(a) + f(b) = 2f(b) + f(a)$$

$$\Rightarrow f(2f(a) + f(b)) = f(2f(b) + f(a))$$

$$\Rightarrow 2a + f(b) = 2b + f(a)$$

$$\Rightarrow a = b \Rightarrow f \text{ είναι } 1-1$$

Ακολουθως θέτουμε $x = 0$ στην αρχική σχέση και έχουμε

$$f(2f(0) + f(y)) = f(y)$$

Τώρα θέτουμε $y = 0$ σε αυτή την σχέση:

$$f(3f(0)) = f(0) \xrightarrow{f \text{ είναι } 1-1} 3f(0) = f(0)$$

$$\Rightarrow f(0) = 0$$

$$\Rightarrow f(f(y)) = f(y) \xrightarrow{f \text{ είναι } 1-1} \boxed{f(x) = x}$$

Η ανταλλαγή των θέσεων των μεταβλητών είναι μια καλή ιδέα για να «παίζουμε» με την συναρτησιακή εξίσωση.

Πρέπει να προσπαθούμε να βρούμε τις ιδιότητες της συνάρτησης. Είναι επί; Είναι ένα προς ένα;

Εάν το πεδίο ορισμού περιλαμβάνει την τιμή 0, προσπαθούμε να την θέτουμε για μία από τις μεταβλητές. Μπορούμε και να αντικαθιστούμε την τιμή 1, και -1.

Χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες της συνάρτησης για να βρούμε περισσότερες πληροφορίες

Προβλήματα Κατηγορίας 1

1. Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f: R \rightarrow R$ που ικανοποιούν τις παρακάτω σχέσεις ταυτόχρονα

$$\begin{cases} f(f(x)) = x \\ f(x^2) - f(x)^2 \geq \frac{1}{4} \end{cases}$$

(Όμοια με Ρουμανία 1981)

2. Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f: R \rightarrow R$ που ικανοποιούν την εξίσωση $f(x+y)f(x^2-xy+y^2) = x^3+y^3$, για κάθε $x, y \in R$

(Μαθηματική ολυμπιάδα Περσίας 2^{ος} γύρος 2018)

3. Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f: R^+ \rightarrow R^+$ που ικανοποιούν την εξίσωση $(x+y) \cdot f(2yf(x) + f(y)) = x^3 f(yf(x))$

για κάθε $x, y \in R^+$

(BMO Shortlist 2015)

Κατηγορία 2: Η χρήση της μαθηματικής επαγωγής

Κάποιες συναρτησιακές εξισώσεις έχουν ως πεδίου ορισμού και πεδίου τιμών τους θετικούς ακέραιους. Αυτές τις συναρτησιακές δεν λύνονται συνήθως με το «κλασσικό» τρόπο. Αλλά λόγω του ότι το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών είναι οι θετικοί ακέραιοι, η μαθηματική επαγωγή μπορεί να μας βοηθήσει να αποδείξουμε τις υποθέσεις μας. Θα μελετήσουμε το παρακάτω παράδειγμα για να δούμε αυτήν την μέθοδο.

Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f: N \rightarrow N$ που ικανοποιούν την εξίσωση $f(f(f(n))) + f(f(n)) + f(n) = 3n$ για κάθε $n \in N$ (PEN K4)

$$\text{Θέτουμε } n = 1, \quad f(f(f(1))) + f(f(1)) + f(1) = 3$$

$$\text{Αλλά έχουμε } f(1) \geq 1 \Rightarrow f(1) = 1$$

Θα δείξουμε ότι η συνάρτηση είναι ένα προς ένα.

$$\text{"Έστω ότι } f(a) = f(b)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(f(a)) = f(f(b)) \\ f(f(f(a))) = f(f(f(b))) \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3a = 3b \Rightarrow \boxed{a = b} \Rightarrow f \text{ είναι 1-1}$$

Τώρα υποθέσουμε ότι $f(n) = n$ για $n = 1, 2, \dots, k$

$$\text{Θα δείξουμε ότι } f(k+1) = k+1$$

Αφού το f έπιανε τις τιμές $1, 2, \dots, k$ και είναι 1-1 πρέπει:

$$f(k+1) \geq k+1$$

$$\Rightarrow f(f(k+1)) \geq k+1$$

$$\Rightarrow f(f(f(k+1))) \geq k+1$$

Αλλά θέτοντας $n = k+1$, έχουμε

$$f(k+1) + f(f(k+1)) + f(f(f(k+1))) = 3(k+1)$$

$$\text{Δηλαδή πρέπει να έχουμε } f(k+1) = k+1$$

Και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Χρησιμοποιούμε τις κλασσικούς μεθόδους για να βρούμε τις ιδιότητες της συνάρτησης.

Εικάζουμε την λύση της συναρτησιακής εξίσωσης και αποδεικνύουμε την υπόθεση μας με την μαθηματική επαγωγή. Συνήθως χρησιμοποιούμε την ισχυρή επαγωγή.

Χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες της συνάρτησης για να ολοκληρώσουμε το επαγωγικό βήμα.

Προβλήματα Κατηγορίας 2

1. Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f: N \rightarrow N$ που ικανοποιούν την σχέση $(n-1)^2 < f(n)f(f(n)) < n^2 + n$ για κάθε $n \in N$ (PEN K3)

Κατηγορία 3: Η χρήση της συναρτησιακής εξίσωσης του Cauchy

Θα ξεκινούμε με ένα πρόβλημα.

Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f: N \rightarrow N$ που ικανοποιούν την σχέση $f(x+y) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in N$

Αφήνεται στον αναγνώστη να δείξει πως $f(x) = Cx$ για κάποιο $C \in N$ (με την χρήση της επαγωγής)

Μετά θα βρούμε τις συναρτήσεις $f: Z \rightarrow Z$ που ικανοποιούν την ίδια σχέση.

Θέτουμε $x = -y$ για να δείξουμε $f(x) = -f(-x)$. Δηλαδή η λύση παραμένει $f(x) = Cx$ για κάποιο $C \in N$

Μετά θα βρούμε τις συναρτήσεις $f: Q \rightarrow Q$ που ικανοποιούν την ίδια σχέση

Γράφουμε $1 = a \times \frac{1}{a}$ όπου $a \in N$ και αποδείξουμε πως $f\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{C}{a}$ (Αφήνεται στον αναγνώστη να το δείξει)

Και ευκολά παίρνουμε $f\left(\frac{b}{a}\right) = bf\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{Cb}{a}$

Δηλαδή η λύση παραμένει $f(x) = Cx$

Αλλά οι συναρτήσεις $f: R \rightarrow R$ που ικανοποιούν την εξίσωση δεν είναι όλες της μορφής $f(x) = Cx$.

Αλλά αποδεικνύεται (με την χρήση της ανάλυσης που είναι έκτος της ύλης ολυμπιάδων) πως όλες τις συναρτήσεις $f: R \rightarrow R$ που ικανοποιούν την εξίσωση και είναι είτε **συνεχείς ή μονότονο ή το σύνολο τιμών τους είναι φραγμένη σε κάποιο διάστημα**, είναι της μορφής $f(x) = Cx$

Ας μελετήσουμε ένα παράδειγμα που χρησιμοποιεί την εξίσωση του Cauchy

Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f: R^+ \rightarrow R^+$ που ικανοποιούν την εξίσωση $(x+y)f(x)f(y) = xyf(x+y)$ για κάθε $x, y \in R^+$

Η εξίσωση γράφεται:

$$\frac{f(x)f(y)}{xy} = \frac{f(x+y)}{x+y}$$

$$\Rightarrow \ln \frac{f(x)f(y)}{xy} = \ln \frac{f(x+y)}{x+y}$$

$$\Rightarrow \ln \frac{f(x)}{x} + \ln \frac{f(y)}{y} = \ln \frac{f(x+y)}{x+y}$$

Θέτουμε $g(x) = \ln \frac{f(x)}{x}$ και έχουμε

$$g(x+y) = g(x) + g(y)$$

Η $g(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbf{R}^+$ (αφού η $f(x)$ είναι συνεχής)

Έχουμε $g(x) = Cx$

$$\Rightarrow \ln \frac{f(x)}{x} = Cx$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{x} = e^{Cx}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = xe^{Cx}}$$

Προσπαθούμε να γράψουμε
την εξίσωση στην μορφή :

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Ο λογάριθμος «μετατρέπει» το
γινόμενο σε άθροισμα

Προβλήματα Κατηγορίας 3

1. Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$ που ικανοποιούν
την εξίσωση $f(x+y) = \frac{f(x)f(y)}{f(x)+f(y)}$ για κάθε $x, y \in \mathbf{R}^+$

Σύνθετα προβλήματα

1. Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f: R \rightarrow R$ που είναι ένα προς ένα και ικανοποιούν την σχέση $\left| \sum_{i=1}^n i \left(f(x+i+1) - f(f(x+i)) \right) \right| < 2016$ για κάθε $x \in R$ και $n \in N$
(BMO 2016)
2. Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f: Z \rightarrow Z$ που ικανοποιούν την εξίσωση $f(xy-1) + f(x+y) = (f(x)+1)(f(y)+1)$ για κάθε $x, y \in Z$
(Όμοια με Art of Problem Solving)
3. Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f: N \rightarrow N$ που ικανοποιούν την εξίσωση $\frac{1}{f(1)f(2)} + \frac{1}{f(2)f(3)} + \dots + \frac{1}{f(n)f(n+1)} = \frac{f(f(n))}{f(n+1)}$ για κάθε $n \in N$
4. Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f: R^+ \rightarrow R^+$ που ικανοποιούν την εξίσωση $\frac{x+f(y)}{xf(y)} = f\left(\frac{1}{y} + f\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ για κάθε $x, y \in R^+$
(3^{ος} γύρος Περσικής μαθηματικής Ολυμπιάδας)
5. Δίνεται μια συνάρτηση $f: N \rightarrow N$ έτσι ώστε για κάθε $a, b \in N$ να υπάρχει ένα τρίγωνο με πλευρές μήκους $a, f(b)$ και $f(b+f(a)-1)$.
Να δείξετε ότι $f(f(x)) = x$ για κάθε $x \in N$
(IMO 2009-Με αλλαγές)
6. Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ έτσι ώστε $\frac{f(p)^2 + f(q)^2}{f(r^2) + f(s^2)} = \frac{p^2 + q^2}{r^2 + s^2}$ για κάθε $p, q, r, s > 0$ με $pq = rs$
(IMO 2008)
7. Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f: R \rightarrow R$ που ικανοποιούν την εξίσωση $f(f(x+y)f(x-y)) = x^2 - yf(y)$, για κάθε $x, y \in R$
(Ιαπωνία 2012)
8. Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f: R \rightarrow R$ που ικανοποιούν την εξίσωση $f(x)f(y) = f(x+y) + xy$ για κάθε $x, y \in R$
(Αλβανία 2014)

Ασκήσεις Εμπλουτισμού

1. Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f: R \rightarrow R$ που ικανοποιούν την εξίσωση $f(f(xy - x)) + f(x + y) = yf(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in R$
(Hong-Kong 2018)
2. Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f: N \rightarrow N$ που ικανοποιούν τις παρακάτω σχέσεις ταυτόχρονα:
 - i. $f(m + n) - 1 \mid f(m) + f(n)$
 - ii. Ο αριθμός $n^2 - f(n)$ είναι τέλειο τετράγωνογια κάθε $m, n \in N$
(Ρουμανία 2014)
3. Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f: R \rightarrow R$ που ικανοποιούν την εξίσωση $f(x^{2015} + (f(y))^{2015}) = (f(x))^{2015} + y^{2015}$, για κάθε $x, y \in R$
(Κορέα 2015)
4. Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f: R \rightarrow R$ με $f(0) \neq 0$ που ικανοποιούν την εξίσωση $f(x + y)^2 = 2f(x)f(y) + \max\{f(x^2 + y^2), f(x^2) + f(y^2)\}$ για κάθε $x, y \in R$
(IMO shortlist 2016)
5. Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f: R^+ \rightarrow R^+$ που ικανοποιούν την εξίσωση $(x + y)f(2yf(x) + f(y)) = x^3f(yf(x))$ για κάθε $x, y \in R^+$
(BMO Shortlist)
6. Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f: R \rightarrow R$ που ικανοποιούν την εξίσωση $f(xy - 1) + f(x)f(y) = 2xy - 1$ για κάθε $x, y \in R$
(Ολλανδία 2016)
7. Έστω ότι k είναι θετικός ακέραιος. Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f: R \rightarrow R$ που ικανοποιούν την εξίσωση $f(x^k y^k) = xyf(x)f(y)$ για κάθε $x, y \neq 0$, όπου $f(0) = 0$
8. Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f: R^+ \rightarrow R^+$ που ικανοποιούν την εξίσωση $(f(a) + f(b))(f(c) + f(d)) = (a + b)(c + d)$ για κάθε $a, b, c, d \in R$ με $abcd = 1$
(Ελβετία 2011)
9. Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f: R \rightarrow R$ που ικανοποιούν την εξίσωση $(f(x) + y)(f(x - y) + 1) = f(f(xf(x + 1))) - yf(y - 1)$ για κάθε $x, y \in R$
(Ελβετία 2016)

10. Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f: R^+ \rightarrow R^+$ που είναι επί και ικανοποιούν την εξίσωση $2xf(f(x)) = f(x)(x + f(f(x)))$ για κάθε $x \in R$
(Βραζιλία 2012)
11. Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f: R \rightarrow R$ που ικανοποιούν την εξίσωση $f(ab) = f(a + b)$ για κάθε δυο **άρρητους** αριθμούς a, b
(Βραζιλία 2010)
12. Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f: R^+ \rightarrow R^+$ που ικανοποιούν την εξίσωση $(z + 1)f(x + y) = f(xf(z) + y) + f(yf(z) + x)$ για κάθε $x, y, z \in R$
(APMO 2016)
13. Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f: Z \rightarrow Z$ που ικανοποιούν την εξίσωση $f(x - f(y)) = f(f(x)) - f(y) - 1$ για κάθε $x, y \in Z$
(IMO Shortlist 2015)
14. Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f: Z \rightarrow Z$ που ικανοποιούν την εξίσωση $n^2 + 4f(n) = f(f(n))^2$ για κάθε $n \in Z$
(IMO Shortlist 2014)
15. Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f: R \rightarrow R$ που ικανοποιούν την εξίσωση $f(1 + xy) - f(x + y) = f(x)f(y)$ για κάθε $x, y \in R$ με $f(-1) \neq 0$
(IMO Shortlist 2012)

Λύσεις: Σύνθετα Προβλήματα

1.

Αρχικά θέτουμε $\sum_{i=1}^n i (f(x+i+1) - f(f(x+i))) = S_n$ και έχουμε:

$$-2016 < S_n < 2016 \text{ και } \left| \sum_{i=1}^{n+1} i (f(x+i+1) - f(f(x+i))) \right| < 2016$$

$$\text{Οπότε } \left| S_n + (n+1) (f(x+n+2) - f(f(x+n+1))) \right| < 2016$$

$$\Rightarrow -2016 < S_n + (n+1) (f(x+n+2) - f(f(x+n+1))) < 2016$$

$$\Rightarrow -4032 < (n+1) (f(x+n+2) - f(f(x+n+1))) < 4032$$

$$\Rightarrow -\frac{4032}{n+1} < f(x+n+2) - f(f(x+n+1)) < \frac{4032}{n+1}$$

Όταν $n \rightarrow \infty$, έχουμε $\frac{4032}{n+1} \rightarrow 0$.

$$\text{Άρα } f(x+n+2) = f(f(x+n+1))$$

Αφού η συνάρτηση είναι ένα προς ένα έχουμε $x+n+2 = f(x+n+1)$

Δηλαδή $f(x) = x+1$, που ικανοποιεί τις συνθήκες

2.

Αρχικά θέτουμε $y = 0$ και έχουμε

$$f(x) + f(-1) = (f(x) + 1)(f(0) + 1)$$

Θα δείξουμε πως $f(0) = 0$. Έστω ότι $f(0) = k \neq 0$

$$\Rightarrow f(x)(k+1) + k+1 = f(x) + f(-1)$$

$$\Rightarrow kf(x) = f(-1) - k - 1$$

$$\Rightarrow f \equiv C$$

$$\Rightarrow (C+1)^2 = 2C$$

$\Rightarrow C^2 + 1 = 0$ που είναι άτοπο. Άρα $f(0) = 0$. Σε αλλά λογία έχουμε

$$f(x) + f(-1) = f(x) + 1$$

$$\Rightarrow f(-1) = 1$$

Τώρα θέτουμε $y = -1$ και έχουμε

$$f(-x-1) + f(x-1) = 2f(x) + 2$$

Επίσης αντικαθιστούμε x στην θέση του $-x$ και έχουμε

$$f(x-1) + f(-x-1) = 2f(-x) + 2$$

$$\Rightarrow f(-x) = f(x)$$

$$\Rightarrow f(x-1) + f(x+1) = 2f(x) + 2$$

Θα δείξουμε με την επαγωγή ότι $f(n) = n^2 \quad \forall n \in N_0$

Για $n = 0$ είναι φανερό

Έστω ότι $f(i) = i^2, i = \{0, 1, 2, \dots, k\}$

Για $n = k + 1$ έχουμε

$$f(k+1) = 2f(k) - f(k-1) + 2 = 2k^2 - (k-1)^2 + 2 = (k+1)^2$$

Άρα $f(n) = n^2 \quad \forall n \in N_0$

Αλλά αφού $f(-x) = f(x)$ έχουμε

$$f(x) = x^2 \quad \forall x \in Z$$

3.

Θέτουμε $n \rightarrow n + 1$.

$$\frac{1}{f(1)f(2)} + \frac{1}{f(2)f(3)} + \dots + \frac{1}{f(n)f(n+1)} + \frac{1}{f(n+1)f(n+2)} = \frac{f(f(n+1))}{f(n+2)}$$

Αφαιρώντας από την παραπάνω σχέση την αρχική σχέση, έχουμε

$$\frac{1}{f(n+1)f(n+2)} = \frac{f(f(n+1))}{f(n+2)} - \frac{f(f(n))}{f(n+1)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f(n+1)f(n+2)} = \frac{f(n+1)f(f(n+1)) - f(n+2)f(f(n))}{f(n+1)f(n+2)}$$

$$\Rightarrow f(n+1)f(f(n+1)) - f(n+2)f(f(n)) = 1$$

$$\Rightarrow f(n) \cdot f(f(n)) - f(n+1)f(f(n-1)) = 1$$

Θα δείξουμε με την επαγωγή ότι $f(n) = n$

Για $n = 1$ είναι φανερό ότι $f(1) = 1$

Έστω ότι $f(n) = n$ για $n = 1, 2, \dots, k$

Θα δείξουμε ότι $f(k + 1) = k + 1$

Από την προηγούμενη σχέση έχουμε

$$f(k) \cdot f(f(k)) - f(k + 1)f(f(k - 1)) = 1$$

$$\Rightarrow k^2 - (k - 1)f(k + 1) = 1$$

$$\Rightarrow f(k + 1) = \frac{k^2 - 1}{k - 1} = k + 1$$

Άρα $f(n) = n$

4.

Η εξίσωση γράφεται

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{f(y)} = f\left(\frac{1}{y} + f\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

Θέτουμε $x \rightarrow \frac{1}{x}$ και έχουμε

$$x + \frac{1}{f(y)} = f\left(f(x) + \frac{1}{y}\right)$$

Θα δείξουμε ότι η συνάρτηση είναι ένα προς ένα. Έστω ότι $f(a) = f(b)$

$$\Rightarrow f(a) + 1 = f(b) + 1$$

$$\Rightarrow f(f(a) + 1) = f(f(b) + 1)$$

$$\Rightarrow a + \frac{1}{f(1)} = b + \frac{1}{f(1)}$$

$$\Rightarrow a = b$$

Άρα η συνάρτηση είναι ένα-προς ένα.

Επίσης θέτουμε $y \rightarrow \frac{1}{f(y)}$ και έχουμε

$$x + \frac{1}{f\left(\frac{1}{f(y)}\right)} = f\left(f(x) + f(y)\right)$$

Αλλάζοντας τις θέσεις του x και y έχουμε:

$$x + \frac{1}{f\left(\frac{1}{f(y)}\right)} = y + \frac{1}{f\left(\frac{1}{f(x)}\right)}$$

$$\Rightarrow y - \frac{1}{f\left(\frac{1}{f(y)}\right)} = x - \frac{1}{f\left(\frac{1}{f(x)}\right)}$$

$$x - \frac{1}{f\left(\frac{1}{f(x)}\right)} = C \Rightarrow f\left(\frac{1}{f(x)}\right) = \frac{1}{x + C}$$

Τώρα θέτουμε $x \rightarrow f(x)$ στην αρχική σχέση και παίρνουμε:

$$\frac{1}{f(x)} + \frac{1}{f(y)} = f\left(\frac{1}{y} + f\left(\frac{1}{f(x)}\right)\right)$$

Ξανά αλλάζοντας τις θέσεις του x και y έχουμε :

$$f\left(\frac{1}{y} + f\left(\frac{1}{f(x)}\right)\right) = f\left(\frac{1}{x} + f\left(\frac{1}{f(y)}\right)\right)$$

$$\xrightarrow{f \text{ είναι } 1-1} \frac{1}{y} + f\left(\frac{1}{f(x)}\right) = \frac{1}{x} + f\left(\frac{1}{f(y)}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y} + \frac{1}{x + C} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y + C}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{x + C} = \frac{1}{y} - \frac{1}{y + C} \quad \forall x, y \in R$$

Άρα η συνάρτηση με τύπο $g(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+C}$ είναι σταθερή. Δηλαδή $C = 0$ και

$$f\left(\frac{1}{f(x)}\right) = \frac{1}{x}$$

Θέτουμε $x \rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right)$ στην παραπάνω σχέση και παίρνουμε:

$$f\left(\frac{1}{f\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)}\right) = \frac{1}{f\left(\frac{1}{x}\right)}$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f\left(\frac{1}{f\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{f\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)}} = f\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$\Rightarrow f(x) = f(f(x))$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{f(x)} = f\left(f\left(\frac{1}{f(x)}\right)\right) = f\left(\frac{1}{x}\right)}$$

Άλλα προηγουμένως πήραμε:

$$\frac{1}{f(x)} + \frac{1}{f(y)} = f\left(\frac{1}{y} + f\left(\frac{1}{f(x)}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f(x)} + \frac{1}{f(y)} = f\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$$

$$\Rightarrow f(x) + f(y) = f(x + y)$$

Που είναι η εξίσωση του Cauchy. Αφού το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι φραγμένη, παίρνουμε $f(x) = tx$

Θέτοντας αυτό στην αρχική εξίσωση έχουμε $f(x) = x$

5.

Για την επίλυση της άσκησης χρειαζόμαστε το παρακάτω λήμμα:

Λήμμα: Εάν υπάρχει τρίγωνο με πλευρές μήκους a, b και 1 όπου a και b είναι θετικοί ακέραιοι, τότε πρέπει να έχουμε $a = b$

Απόδειξη: Από την βασική ανισότητα του τριγώνου, πρέπει έχουμε

$$a + b > 1 > |a - b|$$

$$\Rightarrow |a - b| = 0$$

$$\Rightarrow a = b$$

Θα προχωρήσουμε στο πρόβλημα ως εξής:

Θέτουμε $a = 1$, και από το λήμμα πρέπει να έχουμε $f(b) = f(b + f(1) - 1)$

Εάν $f(1) \neq 1$, τότε η συνάρτηση είναι περιοδική και άρα παίρνει μια μέγιστη τιμή ($f(x) < N \quad \forall x$). Αλλά από την ανισότητα του τριγώνου πρέπει να έχουμε $f(b) + f(b + f(a) - 1) > a$ και αφήνοντας το a να τείνει στο ∞ παίρνουμε άτοπο.

Άρα $\boxed{f(1) = 1}$.

Τώρα θέτουμε $b = 1$ και έχουμε ότι $a, 1$ και $f(f(a))$ είναι οι πλευρές τριγώνου. Δηλαδή από το λήμμα παίρνουμε $\boxed{f(f(x)) = x}$

6.

Θέτουμε $p = q = r = s$ και έχουμε $f(p^2) = f(p)^2$

Δηλαδή $\boxed{f(1) = 1}$. Τώρα θέτοντας $q = 1$ και $r = s = \sqrt{p}$ (αριθμοί που ικανοποιούν $pq = rs$) έχουμε $\frac{f(p)^2 + 1}{2f(p)} = \frac{p^2 + 1}{2p}$

$$\Leftrightarrow p(f(p)^2 + 1) = (p^2 + 1)f(p)$$

$$\Leftrightarrow (pf(p) - 1)(f(p) - p) = 0$$

Όποτε έχουμε 3 συναρτήσεις που μπορούν να ικανοποιούν την εξίσωση.

- i. $f(x) = x$
- ii. $f(x) = \frac{1}{x}$
- iii. $f(x) = \begin{cases} x, & x \in A \\ \frac{1}{x}, & x \notin A \end{cases}$ όπου $A \neq \emptyset, (0, +\infty)$

Είναι φανερό ότι οι δυο πρώτες ικανοποιούν την εξίσωση. Θα δείξουμε ότι η τρίτη συνάρτηση δεν ικανοποιεί την εξίσωση.

Έστω ότι η συνάρτηση ικανοποιεί την εξίσωση και συνεπώς έστω ότι υπάρχουν αριθμοί $a \neq 1$ και $b \neq 1$ με $f(a) = a$ και $f(b) = \frac{1}{b}$.

Θέτουμε $p = a, q = b, r = ab$ και $s = 1$

Άρα

$$\frac{a^2 + \frac{1}{b^2}}{f(a^2b^2) + 1} = \frac{a^2 + b^2}{a^2b^2 + 1}$$

$$\frac{a^2b^2 + 1}{b^2f(a^2b^2) + b^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2b^2 + 1}$$

$$f(a^2b^2) = \frac{(a^2b^2 + 1)^2}{b^2(a^2 + b^2)} - 1 = \frac{a^4b^4 + a^2b^2 - b^4 + 1}{b^2(a^2 + b^2)}$$

$$\text{Εάν } f(a^2b^2) = a^2b^2$$

$$\Rightarrow \frac{a^4b^4 + a^2b^2 - b^4 + 1}{b^2(a^2 + b^2)} = a^2b^2$$

$$\Rightarrow a^4b^4 + a^2b^2 - b^4 + 1 = a^4b^4 + a^2b^6$$

$$\Rightarrow a^2b^6 - a^2b^2 + b^4 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (b^4 - 1)(a^2b^2 + 1) = 0$$

$$\Rightarrow b = 1 \text{ που είναι άτοπο.}$$

$$\text{Εάν } f(a^2b^2) = \frac{1}{a^2b^2}$$

$$\Rightarrow \frac{a^4b^4 + a^2b^2 - b^4 + 1}{b^2(a^2 + b^2)} = \frac{1}{a^2b^2}$$

$$\Rightarrow a^4b^4 + a^2b^2 - b^4 + 1 = \frac{a^2 + b^2}{a^2}$$

$$\Rightarrow a^4b^4 + a^2b^2 - b^4 = \frac{b^2}{a^2}$$

$$\Rightarrow a^4b^2 + a^2 - b^2 = \frac{1}{a^2}$$

$$\Rightarrow a^6b^2 + a^4 - a^2b^2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (a^4 - 1)(a^2b^2 + 1) = 0$$

$$\Rightarrow a = 1 \text{ που είναι άτοπο.}$$

Συνεπώς η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Άρα οι λύσεις είναι $f(x) = x$ και $f(x) = \frac{1}{x}$

7.

Θέτουμε $x = y = 0$ στην εξίσωση και έχουμε:

$$f(f(0)^2) = 0$$

Τώρα θέτουμε $x = f(0)^2$ και $y = 0$ και παίρνουμε:

$$f(f(f(0)^2)^2) = f(0)^4$$

$$\Rightarrow f(0) = f(0)^4$$

$$\Rightarrow f(0) = 0 \text{ ή } f(0) = 1$$

Εάν $f(0) = 1$, τότε θέτοντας $x = y = 0$ στην αρχική εξίσωση έχουμε:

$$f(1) = 0$$

Τώρα εάν θέσουμε $y = 1$ έχουμε

$$f(f(x-1)f(x+1)) = x^2 \text{ που καταλήγει σε άτοπο για } x = 0 \text{ (} f(0) = 0 \text{)}$$

Άρα έστω ότι $f(0) = 0$.

Για να τελειώσουμε το πρόβλημα θέτουμε $x = y \neq 0$ και έχουμε:

$$f(0) = x^2 - xf(x)$$

$$\Rightarrow 0 = x^2 - xf(x)$$

$$\Rightarrow f(x) = x$$

8.

Καταρχάς θέτουμε $y = 0$ στην εξίσωση και έχουμε:

$$f(x)f(0) = f(x)$$

Είναι φανερό ότι η συνάρτηση $f(x) \equiv 0$ δεν ικανοποιεί την εξίσωση, γι' αυτό έχουμε: $f(0) = 1$

Τώρα θέτουμε $y = -x$ στην αρχική εξίσωση και έχουμε:

$$f(x)f(-x) = 1 - x^2, \text{ όπου για } x = 1 \text{ έχουμε:}$$

$$f(1) = 0 \text{ ή } f(-1) = 0.$$

Περίπτωση 1: $f(1) = 0$

Σε αυτή την περίπτωση θέτουμε $y = 1$ στην αρχική εξίσωση και παίρνουμε:

$$f(x + 1) + x = 0$$

$$\Rightarrow f(x + 1) = -x$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = 1 - x}, \text{ που ικανοποιεί την εξίσωση}$$

Περίπτωση 2: $f(-1) = 0$

Σε αυτή την περίπτωση θέτουμε $y = -1$ στην αρχική εξίσωση και παίρνουμε:

$$f(x - 1) - x = 0$$

$$\Rightarrow f(x - 1) = x$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = x + 1}, \text{ που ικανοποιεί την εξίσωση}$$

Άρα έχουμε δυο λύσεις: $f(x) = 1 - x$ και $f(x) = x + 1$

Λύσεις: Προβλήματα Κατηγορίας 1

1.

Θέτουμε $x = 0$ στην εξίσωση και έχουμε $f(0) - f(0)^2 \geq \frac{1}{4}$

$$4f(0)^2 - 4f(0) + 1 \leq 0$$

$$(2f(0) - 1)^2 \leq 0$$

$$f(0) = \frac{1}{2}$$

Θέτουμε $x = 1$ στην εξίσωση και έχουμε $f(1) - f(1)^2 \geq \frac{1}{4}$

$$4f(1)^2 - 4f(1) + 1 \leq 0$$

$$(2f(1) - 1)^2 \leq 0$$

$$f(1) = \frac{1}{2}$$

$$\text{Αλλά εάν } f(a) = f(b) \Rightarrow f(f(a)) = f(f(b)) \Rightarrow a = b$$

Δηλαδή η συνάρτηση είναι ένα προς ένα, και οι παραπάνω σχέσεις δηλώνουν ότι δεν υπάρχει τέτοια συνάρτηση.

2.

Πρώτα θέτουμε $x = y = 0$ και έχουμε $\boxed{f(0) = 0}$

Μετά θέτουμε $x = 1, y = 0$ και έχουμε $f(1)^2 = 1$, δηλαδή $f(1) = \pm 1$

Λόγω της ταυτότητας $x^2 - xy + y^2 = x^2 - x(x - y) + (x - y)^2$,

αντικαθιστούμε στην εξίσωση $y \rightarrow x - y$ και έχουμε

$$\frac{x^3 + (x - y)^3}{f(2x - y)} = \frac{x^3 + y^3}{f(x + y)} \Rightarrow \frac{f(2x - y)}{f(x + y)} = \frac{2x - y}{x + y}$$

Τώρα σε αυτή την σχέση θέτουμε $y \rightarrow 2x - 1$ και έχουμε:

$$\frac{x^3 + (x - 1)^3}{f(1)} = \frac{x^3 + (2x - 1)^3}{f(3x - 1)}$$

$$\Rightarrow f(3x - 1) = \pm(3x - 1)$$

$$\Rightarrow f(x) = x \quad \text{ή} \quad f(x) = -x$$

3.

Θέτουμε $y = 1$ στην εξίσωση και έχουμε

$$\boxed{(x+1) \cdot f(2f(x) + f(1)) = x^3 f(f(x))} : (1)$$

Θα δείξουμε ότι η συνάρτηση είναι ένα προς ένα. Έστω ότι $f(a) = f(b)$

$$\Rightarrow \boxed{f(f(a)) = f(f(b))}$$

$$\text{Και } 2f(a) + f(1) = 2f(b) + f(1)$$

$$\Rightarrow \boxed{f(2f(a) + f(1)) = f(2f(b) + f(1))}$$

Οπότε από την σχέση (1)

$$\Rightarrow \frac{a^3}{a+1} = \frac{b^3}{b+1}$$

$$\Rightarrow a^3 b + a^3 = ab^3 + b^3$$

$$\Rightarrow ab(a^2 - b^2) + (a^3 - b^3) = 0$$

$$\Rightarrow (a-b)(a^2 + b^2 - ab + ab^2 + a^2b) = 0$$

$$\because a^2 + b^2 - ab + ab^2 + a^2b > 0$$

$$\Rightarrow \boxed{a = b}, \text{ δηλαδή η συνάρτηση είναι 1-1.}$$

Τώρα στην αρχική σχέση θέτουμε $y = x^3 - x$ με $x \geq 1$ και έχουμε

$$x^3 f(2(x^3 - x)f(x) + f(x^3 - x)) = x^3 f((x^3 - x) \cdot f(x))$$

$$\Rightarrow f(2(x^3 - x)f(x) + f(x^3 - x)) = f((x^3 - x) \cdot f(x))$$

$$\Rightarrow 2(x^3 - x)f(x) + f(x^3 - x) = (x^3 - x)f(x)$$

$$\Rightarrow (x^3 - x)f(x) + f(x^3 - x) = 0$$

Που είναι άτοπο καθώς $x^3 - x \geq 0$ και $f(x) > 0$. Άρα δεν υπάρχουν τέτοιες συναρτήσεις.

Λύσεις: Προβλήματα Κατηγορίας 2

1.

Θα αποδείξουμε με την μαθηματική επαγωγή ότι $f(n) = n$.

Θέτοντας $n = 1$ στην αρχική εξίσωση, έχουμε: $0 < f(1)f(f(1)) < 2$

Δηλαδή $f(1)f(f(1)) = 1 \Rightarrow f(1) = 1$

Τώρα υποθέσουμε ότι $f(n) = n$ για $n = 1, 2, \dots, k$

Θα αποδείξουμε ότι $f(k+1) = k+1$

Έστω ότι $f(k+1) = m$

Θέτοντας $n = k+1$ στην αρχική εξίσωση έχουμε:

$$k^2 < f(k+1)f(f(k+1)) < (k+1)(k+2)$$

Εάν $m < k+1$, τότε από την υπόθεση και την σχέση έχουμε:

$$k^2 < f(k+1)f(f(k+1)) = mf(m) = m^2$$

Δηλαδή $k < m < k+1$, που είναι άτοπο καθώς οι αριθμοί είναι θετικοί ακέραιοι .

Εάν $m > k+1$, τότε από την υπόθεση και την σχέση έχουμε

$$(k+1)(k+2) > f(k+1)f(f(k+1)) = mf(m) \geq (k+2)f(m)$$

$$\Rightarrow f(m) < k+1$$

Αλλά $f(m)f(f(m)) = f(m)^2$ καθώς $f(m) < k+1$

Άρα $(m-1)^2 < f(m)f(f(m)) < (k+1)^2 \leq (m-1)^2$ που είναι άτοπο.

Άρα $m = k+1 \Rightarrow f(k+1) = k+1$ και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Λύσεις: Προβλήματα Κατηγορίας 3

1.

Η εξίσωση γράφεται:

$$f(x+y) = \frac{f(x)f(y)}{f(x)+f(y)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{f(x+y)} = \frac{f(x) + f(y)}{f(x)f(y)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{f(x+y)} = \frac{1}{f(x)} + \frac{1}{f(y)}$$

Ορίζουμε $g(x) = \frac{1}{f(x)}$, και έχουμε

$$g(x+y) = g(x) + g(y)$$

Από την εξίσωση του Cauchy έχουμε:

$$g(x) = Cx \Rightarrow \boxed{f(x) = \frac{C}{x}}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: Ανισότητες

2Α: Βασικές ανισότητες

Οι ανισότητες που δίνονται στις μαθηματικές ολυμπιάδες βασίζονται συνήθως στην βασική ανισότητα: $x^{2k} \geq 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$

Ανισότητα 1: Η πιο σημαντική ανισότητα είναι η **Ανισότητα AM-GM-HM**

Αν $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, έχουμε ότι:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \dots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n}}$$

$$\text{Όπου } \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n} = AM, \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \dots a_n} = GM, \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n}} = HM$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνον αν: $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n$

Χρήσιμες μορφές της ανισότητας AM-GM:

- $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$
- $(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca)$
- $x^2y + y^2z + z^2x + xy^2 + yz^2 + zx^2 \geq 6xyz$
- $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$
- $(a + b + c)(ab + bc + ca) \geq 9abc$

Τρόποι χρήσης της ανισότητας AM-GM

Κατηγορία 1: Η απλή χρήση της ανισότητας

Παράδειγμα: Αν x, y and z είναι θετικοί αριθμοί, να βρείτε τη μέγιστη τιμή της παράστασης: (Διαγωνισμός Ελλάδας)

$$A = \frac{xy}{x^3 + y^3 + 1} + \frac{xz}{x^3 + z^3 + 1} + \frac{yz}{y^3 + z^3 + 1}$$

Από την ανισότητα AM-GM έχουμε $x^3 + y^3 + 1 \geq 3xy$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^3 + y^3 + 1} \leq \frac{1}{3xy} \Rightarrow \frac{xy}{x^3 + y^3 + 1} \leq \frac{1}{3}$$

$$\text{Ομοίως } \frac{xz}{x^3+z^3+1} \leq \frac{1}{3} \text{ και } \frac{yz}{y^3+z^3+1} \leq \frac{1}{3}$$

$$\text{Άρα } A \leq 1 \Rightarrow A_{\max} = 1$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνον αν $x = y = z = 1$

Κατηγορία 2: Η «αντίστροφη» μέθοδος

Κάποιες φορές δεν μπορούμε να χρησιμοποιούμε την ανισότητα AM-GM άμεσα στον παρονομαστή. Για αυτό πρέπει να γράφουμε ένα κλάσμα στην μορφή $\frac{a}{b} = x - \frac{x_0}{b}$ και μετά χρησιμοποιούμε την ανισότητα AM-GM.

Παράδειγμα: Εάν a, b, c είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί έτσι ώστε $a + b + c = 3$, να δείξετε ότι:

$$\frac{a+1}{b^2+1} + \frac{b+1}{c^2+1} + \frac{c+1}{a^2+1} \geq 3$$

$$\text{Έχουμε ότι: } \frac{a+1}{b^2+1} = a+1 - \frac{b^2(a+1)}{b^2+1}$$

Από την ανισότητα AM-GM: $b^2 + 1 \geq 2b$, δηλαδή

$$\frac{a+1}{b^2+1} \geq a+1 - \frac{b^2(a+1)}{2b} = a+1 - \frac{ab+b}{2}$$

Άρα

$$\sum_{cyc} \frac{a+1}{b^2+1} \geq \sum_{cyc} (a+1) - \sum_{cyc} \frac{ab}{2} - \sum_{cyc} \frac{b}{2} = 6 - \frac{3}{2} - \sum_{cyc} \frac{ab}{2} = \frac{9}{2} - \frac{ab+bc+ca}{2}$$

$$\text{Αρκεί να δείξουμε ότι } \frac{9}{2} - \frac{ab+bc+ca}{2} \geq 3$$

$$\Leftrightarrow ab + bc + ca \leq 3$$

Αυτό ισχύει από την ανισότητα AM-GM καθώς:

$$(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca) \Leftrightarrow ab+bc+ca \leq 3$$

Γράφουμε τα κλάσματα στην μορφή $\frac{a}{b} = x - \frac{x_0}{b}$

Χρησιμοποιούμε την ανισότητα AM-GM στον παρονομαστή.

Ανισότητα 2: Μια πολύ δυνατή ανισότητα είναι η **Ανισότητα Cauchy Schwartz**

Για οποιαδήποτε πραγματικούς αριθμούς $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ έχουμε ότι:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + \dots + a_n b_n)^2$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνον αν $\frac{a_1}{b_1} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$

Χρήσιμες μορφές της ανισότητας Cauchy Schwartz:

- $\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n}$
- $n(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \geq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2$
- $(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2$

Παράδειγμα: Αν a, b and c είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί να δείξετε ότι:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

Λύση: Από Cauchy Schwartz:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \frac{a^2}{ab+ca} + \frac{b^2}{bc+ab} + \frac{c^2}{ca+bc}$$

$$\text{και } \frac{a^2}{ab+ca} + \frac{b^2}{bc+ab} + \frac{c^2}{ca+bc} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)} \text{ (Cauchy Schwartz)}$$

$$\text{Επίσης } (a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca) \text{ (AM-GM)}$$

Άρα

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3(ab+bc+ca)}{2(ab+bc+ca)} = \frac{3}{2}$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνον αν $a = b = c$

Ανισότητα 3: Μια άλλη χρήσιμη ανισότητα είναι η **Ανισότητα Schur**

Εάν x, y, z και t είναι πραγματικοί αριθμοί οπού $x, y, z > 0$ έχουμε ότι:

$$x^t(x-y)(x-z) + y^t(y-z)(y-x) + z^t(z-x)(z-y) \geq 0$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνον αν $x = y = z$ ή ένα από τα x, y, z είναι 0, και τα άλλα δυο ίσα.

Πολλαπλασιάζω τον αριθμητή και τον παρονομαστή με τον ίδιο αριθμό, έτσι ώστε να έχουμε το ίδιο κλάσμα με τέλειο τετράγωνο στον αριθμητή.

Χρήσιμες μορφές της ανισότητας Schur:

- $a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)$
- $a^4 + b^4 + c^4 + abc(a+b+c) \geq ab(a^2+b^2) + bc(b^2+c^2) + ca(c^2+a^2)$
- $abc \geq (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$
- $a^2 + b^2 + c^2 \geq 2(ab+bc+ca) - 2abc - 1$

Παράδειγμα: Αν a, b και c είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί να δείξετε ότι:

$$a^3b^6 + b^3c^6 + c^3a^6 + 3a^3b^3c^3 \geq abc(a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3) + a^2b^2c^2(a^3 + b^3 + c^3)$$

(BMO 2015)

Η ανισότητα γράφεται:

$$\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{c^3} + \frac{c^3}{a^3} + 3 \geq \frac{ab}{c^2} + \frac{bc}{a^2} + \frac{ca}{b^2} + \frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab}$$

Θέτουμε: $\frac{a}{b} = x, \frac{b}{c} = y, \frac{c}{a} = z$ (προφανώς $xyz = 1$)

και αρκεί να δείξουμε ότι

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3 \geq \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{z}{x} + \frac{x}{z} + \frac{y}{z} + \frac{z}{y}$$

$$\Leftrightarrow x^3 + y^3 + z^3 + 3 \geq x^2y + y^2x + y^2z + z^2y + x^2z + z^2x$$

Αυτό ισχύει από την ανισότητα Schur καθώς

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)$$

Ανισότητα 4: Η τελευταία που θα μελετηθεί σε αυτή την ενότητα είναι η Ανισότητα Muirhead. Αλλά πριν να διατυπώσουμε την ανισότητα, πρέπει να κατανοήσουμε κάποιες έννοιες.

Σύμβολο: Για δύο ακολουθίες αριθμών $a_1, a_2, \dots, a_n$ και $b_1, b_2, \dots, b_n$ γράφουμε $[a_1, a_2, \dots, a_n] > [b_1, b_2, \dots, b_n]$ εάν ισχύουν τα παρακάτω ταυτόχρονα:

- i. $a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$
- ii. $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ και $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$
- iii. $\sum_{i=1}^k a_i \geq \sum_{i=1}^k b_i$ για κάθε $k = 1, 2, \dots, n$

Παραδείγματος χάρη, έχουμε $[4, 2, 0, 0] > [2, 2, 1, 1]$ αφού ισχύουν τα παραπάνω ταυτόχρονα.

Η ανισότητα Muirhead

Έστω ότι $a_1, a_2, \dots, a_n$ και $b_1, b_2, \dots, b_n$ είναι 2 ακολουθίες μη αρνητικών ακεραίων έτσι ώστε $[a_1, a_2, \dots, a_n] > [b_1, b_2, \dots, b_n]$. Τότε για κάθε μη-αρνητικούς πραγματικούς αριθμούς $x_1, x_2, \dots, x_n$ έχουμε

$$\sum_{sym} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n} \geq \sum_{sym} x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_n^{b_n}$$

Παράδειγμα: Αν a, b και c είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί να δείξετε ότι:

$$a^5 + b^5 + c^5 \geq a^4 \sqrt{bc} + b^4 \sqrt{ca} + c^4 \sqrt{ab}$$

Κάνουμε το μετασχηματισμό $a = x^2, b = y^2, c = z^2$ ←

Τώρα η ανισότητα γράφεται:

$$a^{10} + b^{10} + c^{10} \geq a^8 bc + b^8 ca + c^8 ab$$

Που ισχύει από την ανισότητα Muirhead,

καθώς $[10,0,0] > [8,1,1]$ ←

Η ανισότητα του Muirhead δεν ισχύει για μη-ακέραιες δυνάμεις. Κάνουμε αυτό το μετασχηματισμό για να έχουμε ακέραιες δυνάμεις

Η ανισότητα είναι συμμετρική και οι εκθέτες των παραστάσεων ικανοποιούν την σχέση $[10,0,0] > [8,1,1]$. Γι' αυτό η ανισότητα Muirhead τελειώνει το πρόβλημα

Προβλήματα 2Α

1. Εάν a, b, c είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, να δείξετε ότι

$$\frac{a^3}{b^2 - bc + c^2} + \frac{b^3}{c^2 - ca + a^2} + \frac{c^3}{a^2 - ab + b^2} \geq \frac{3(ab + bc + ca)}{a + b + c}$$

(BMO Shortlist)

2. Εάν a, b, c είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί έτσι ώστε $a + b + c = 3$, να δείξετε ότι:

$$\frac{1}{1 + 2b^2c} + \frac{1}{1 + 2c^2a} + \frac{1}{1 + 2a^2b} \geq 1$$

3. Εάν a, b, c είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, να δείξετε ότι

$$\frac{8}{(a+b)^2 + 4abc} + \frac{8}{(b+c)^2 + 4abc} + \frac{8}{(c+a)^2 + 4abc} + a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{8}{a+3} + \frac{8}{b+3} + \frac{8}{c+3}$$

4. Εάν a, b, c, d είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί έτσι ώστε $a + b + c + d = 1$, να δείξετε ότι:

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{ab + bc + ca} + \frac{b^3 + c^3 + d^3}{bc + cd + db} + \frac{c^3 + d^3 + a^3}{cd + da + ac} + \frac{d^3 + a^3 + b^3}{da + ab + bd} \geq 1$$

2B: Τρόποι επίλυσης ανισοτήτων

Όπως στις άλλες ενότητες της άλγεβρας, υπάρχουν διάφοροι τρόποι για να αποδείξουμε μια πρόταση. Θα μελετούμε διαφορετικά εργαλεία που ευκολύνουν την απόδειξη μιας ανισότητας.

Εργαλείο 1: Μετασχηματισμοί

Όπως είδαμε προηγουμένως, ένας μετασχηματισμός μπορεί να βοηθάει να αλλάζουμε την μορφή μιας ανισότητας. Θα δούμε κάποιους κλασσικούς μετασχηματισμούς που χρησιμοποιούνται στις ανισότητες αναλόγως της συνθήκης της ανισότητας.

1. Εάν $abc = 1$ τότε υπάρχουν αριθμοί x, y και z έτσι ώστε :

$$a = \frac{x}{y}, \quad b = \frac{y}{z}, \quad c = \frac{z}{x}$$

Παράδειγμα: Εάν a, b, c είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, έτσι ώστε $abc = 1$ να δείξετε ότι:

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{c}\right)^2 + \left(c + \frac{1}{a}\right)^2 \geq 3(a + b + c + 1) \quad (\text{JBMO 2014})$$

Έστω ότι $a = \frac{x}{y}$, $b = \frac{y}{z}$, $c = \frac{z}{x}$.

Η ανισότητα γράφεται:

$$\left(\frac{x+z}{y}\right)^2 + \left(\frac{y+x}{z}\right)^2 + \left(\frac{z+y}{x}\right)^2 \geq 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + 1\right)$$

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη με $x^2y^2z^2$ και η ανισότητα γράφεται:

$$x^2y^2(x+y)^2 + y^2z^2(y+z)^2 + z^2x^2(x+z)^2 \geq 3(x^3yz^2 + x^2y^3z + xy^2z^3 + x^2y^2z^2)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{sym} x^4z^2 + \sum_{sym} x^3y^3 \geq 3(x^3yz^2 + x^2y^3z + xy^2z^3 + x^2y^2z^2)$$

Από την ανισότητα Muirhead έχουμε:

$$\sum_{sym} x^3y^3 \geq 3x^2y^2z^2 \text{ αφού } [3,3,0] \succ [2,2,2]$$

Επίσης από την ανισότητα AM-GM έχουμε

$$x^4z^2 + z^4x^2 + x^3y^3 \geq 3x^3z^2y$$

$$x^4y^2 + y^4x^2 + y^3z^3 \geq 3x^2y^3z$$

$$z^4y^2 + y^4z^2 + x^3z^3 \geq 3xy^2z^3$$

Προσθέτοντας αυτές τις ανισότητες κατά μέλη έχουμε το ζητούμενο.

Ο μετασχηματισμός ευκολύνει την ανισότητα αφού δεν θα υπάρχουν επιπρόσθετες συνθήκες

2. Εάν $a + b + c = abc$ με $a, b, c > 0$ τότε υπάρχουν θετικοί αριθμοί x, y και z έτσι ώστε

$$a = \sqrt{\frac{x}{yz}} \quad , \quad b = \sqrt{\frac{y}{zx}} \quad , \quad c = \sqrt{\frac{z}{xy}} \quad , \quad x + y + z = 1$$

Παράδειγμα: Εάν a, b, c είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, έτσι ώστε $a + b + c = abc$ να δείξετε ότι:

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \leq \frac{3}{2}$$

$$\text{Έστω ότι } a = \sqrt{\frac{x}{yz}} \quad , \quad b = \sqrt{\frac{y}{zx}} \quad , \quad c = \sqrt{\frac{z}{xy}} \quad , \quad x + y + z = 1$$

Η ανισότητα γράφεται

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{x}{yz}}} + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{y}{zx}}} + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{z}{xy}}} \leq \frac{3}{2}$$

$$\sqrt{\frac{yz}{yz+x}} + \sqrt{\frac{zx}{zx+y}} + \sqrt{\frac{xy}{xy+z}} \leq \frac{3}{2}$$

Αφού $x + y + z = 1$, έχουμε $yz + x = yz + x(x + y + z) = (x + y)(x + z)$

Άρα η ανισότητα γράφεται:

$$A = \sqrt{\frac{yz}{(x+y)(x+z)}} + \sqrt{\frac{zx}{(y+x)(y+z)}} + \sqrt{\frac{xy}{(z+x)(z+y)}} \leq \frac{3}{2}$$

Από ΑΜ-ΓΜ έχουμε:

$$\sqrt{\frac{yz}{(x+y)(x+z)}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{y}{x+y} + \frac{z}{x+z} \right)$$

Δηλαδή

$$A \leq \frac{1}{2} \left(\frac{y}{x+y} + \frac{z}{x+z} + \frac{z}{y+z} + \frac{x}{y+x} + \frac{x}{z+x} + \frac{y}{z+y} \right) = \frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2}$$

3. Εάν a, b και c είναι πλευρές ενός τριγώνου τότε υπάρχουν αριθμοί x, y και z έτσι ώστε:

$$a = x + y, \quad b = y + z, \quad c = z + x$$

Επίσης υπάρχουν αριθμοί x, y και z έτσι ώστε:

$$a = (x + y)^2, \quad b = (y + z)^2, \quad c = (z + x)^2$$

Παράδειγμα: Εάν a, b, c είναι οι πλευρές ενός τριγώνου, να δείξετε ότι:

$$a^2(b + c - a) + b^2(c + a - b) + c^2(a + b - c) \leq 3abc$$

Έστω ότι $a = x + y, b = y + z, c = z + x$

$$2z(x + y)^2 + 2x(y + z)^2 + 2y(z + x)^2 \leq 3(x + y)(y + z)(z + x)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} 2z(x^2 + y^2 + 2xy) \leq 3(x^2y + y^2z + z^2x + xy^2 + yz^2 + zx^2 + 2xyz)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} (2x^2z + 2y^2z + 4xyz) \leq 3 \sum_{cyc} (x^2z + y^2z) + 6xyz$$

$$\Leftrightarrow 6xyz \leq x^2y + y^2z + z^2x + xy^2 + yz^2 + zx^2$$

Που προκύπτει από την ανισότητα AM-ΓΜ

4. Εάν a, b και c είναι διαφορετικοί και $a > b > c > 0$ τότε υπάρχουν αριθμοί x, y και z έτσι ώστε:

$$a = x + y + z, \quad b = x + y, \quad c = x, \quad x, y, z > 0$$

Παράδειγμα: Εάν a, b, c είναι διαφορετικοί θετικοί ακέραιοι, να δείξετε ότι:

$$(a + b + c)(ab + bc + ca - 2) \geq 9abc$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας έστω ότι $a > b > c$

Θέτουμε $a = x + y + z, b = x + y, c = x$ όπου $x, y, z \geq 1$

Η ανισότητα γράφεται:

$$(3x + 2y + z)(3x^2 + 4xy + 2xz + y^2 + yz - 2) \geq 9(x^3 + 2x^2y + x^2z + xy^2 + xyz)$$

$$2xy^2 + 2xyz - 6x + 2xz^2 + 2y^3 + 3y^2z - 4y + yz^2 - 2z \geq 0$$

$$2x(y^2 + yz + z^2 - 3) + (2y^3 + 3y^2z + yz^2 - 4y - 2z) \geq 0 \quad : (1)$$

Αφού $x, y, z \geq 1$, έχουμε: $y^2 + yz + z^2 \geq 3$

$$\text{Επίσης } 2y^3 + 3y^2z + yz^2 \geq 2y + 2y^2z + y + y \geq 4y + 2z$$

Άρα ισχύει η ανισότητα (1) και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Εργαλείο 2: Ομοιογενείς ανισότητες

Μια ανισότητα λέγεται ομοιογενής εάν ο μετασχηματισμός $x \rightarrow kx$, $y \rightarrow ky$, $z \rightarrow kz$ δεν αλλάζει την ανισότητα για κάθε πραγματικό αριθμό k . Σε τέτοιες ανισότητες μπορούμε να προσθέτουμε **μία** από τις παρακάτω συνθήκες:

i. $x + y + z = 1$

ii. $x + y + z = 3$

iii. $xyz = 1$

Σχόλιο: Μπορούμε να προσθέτουμε οποιαδήποτε συνθήκη που αφορά το άθροισμα ή το γινόμενο των αριθμών. Αλλά τα πιο πάνω θεωρούνται οι «καλύτερες» συνθήκες.

Παράδειγμα: Εάν a, b, c είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, να δείξετε ότι:

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geq \frac{8}{3}(a + b + c)(abc)^{\frac{2}{3}}$$

Κάνουμε το μετασχηματισμό το μετασχηματισμό $a \rightarrow ka$, $b \rightarrow kb$, $c \rightarrow kc$

Η ανισότητα γράφεται

$$k^3(a + b)(b + c)(c + a) \geq k \cdot (k^3)^{\frac{2}{3}}(a + b + c)(abc)^{\frac{2}{3}}$$

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geq (a + b + c)(abc)^{\frac{2}{3}}$$

που είναι η αρχική ανισότητα.

Τώρα έστω ότι $a + b + c = 1$

Έτσι η ανισότητα γράφεται

$$(1 - a)(1 - b)(1 - c) \geq \frac{8}{3}(abc)^{\frac{2}{3}}$$

$$\Leftrightarrow 1 + ab + bc + ca - a - b - c - abc \geq \frac{8}{3}(abc)^{\frac{2}{3}}$$

$$\Leftrightarrow ab + bc + ca - abc \geq \frac{8}{3}(abc)^{\frac{2}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - 1 \geq \frac{8}{3(abc)^{\frac{1}{3}}}$$

$$\Leftrightarrow (abc)^{\frac{1}{3}} \geq \frac{8}{3\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - 1\right)}$$

Από την ανισότητα GM-HM έχουμε:

$$(abc)^{\frac{1}{3}} \geq \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$$

Αρκεί να δείξουμε πως

$$\frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \geq \frac{8}{3\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - 1\right)}$$

$$\Leftrightarrow 9\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) - 9 \geq 8\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9$$

Που είναι αληθής από την ανισότητα Cauchy Schwartz.

Εργαλείο 3: Ομαλοποίηση

Κάποιες ανισότητες έχουν την συνθήκη $a + b + c = 1$ ή $abc = 1$ αλλά δεν είναι ομοιογενή. Σε τέτοιες ανισότητες προσπαθούμε να γράψουμε την ανισότητα (η τις παραστάσεις) σε ομοιογενή μορφή, πολλαπλασιάζοντας κάποιες παραστάσεις με δυνάμεις του $a + b + c = 1$ ή $abc = 1$.

Παράδειγμα: Εάν a, b, c είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, έτσι ώστε $a + b + c = 1$ να δείξετε ότι:

$$4\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) - \frac{1}{abc} \leq 9 \quad (\text{Παρόμοια με BMO Shortlist})$$

Η ανισότητα γράφεται:

$$\frac{4(ab + bc + ca) - 1}{abc} \leq 9$$

$$\Leftrightarrow 4(ab + bc + ca) \leq 9abc + 1$$

Όμως αυτή η ανισότητα δεν είναι ομοιογενής.

Τι χρειάζεται γιο να έχουμε ομοιογενής ανισότητα; Πρέπει να πολλαπλασιάσουμε κάθε μέλος με μια κατάλληλη δύναμη του $a + b + c$.

Πολλαπλασιάζοντας το 1 με $(a + b + c)^3$ και το $(ab + bc + ca)$ με $a + b + c$, δεν θα γίνεται αλλαγή στην ανισότητα αφού $a + b + c = 1$.

Άρα το ζητούμενο είναι ισοδύναμο με:

$$4(ab + bc + ca)(a + b + c) \leq 9abc + (a + b + c)^3$$

$$\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2$$

Η οποία είναι αληθής από την ανισότητα του Schur.

Προβλήματα 2B

- Εάν a, b, c είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί έτσι ώστε $abc = 1$, να δείξετε ότι:

$$\frac{2}{(a+1)^2 + b^2 + 1} + \frac{2}{(b+1)^2 + c^2 + 1} + \frac{2}{(c+1)^2 + a^2 + 1} \leq 1$$

- Εάν a, b, c είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί έτσι ώστε $a + b + c = abc$, να δείξετε ότι:

$$\left(\sum_{cyc} \sqrt{(1+a^2)(1+b^2)} \right) - \sqrt{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)} \geq 4$$

(Μολδαβία 2017)

- Εάν a, b, c είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί έτσι ώστε $abc = 1$, να δείξετε ότι:

$$\frac{1}{a^5 + b^5 + c^2} + \frac{1}{b^5 + c^5 + a^2} + \frac{1}{c^5 + a^5 + b^2} \leq 1$$

(BMO Shortlist 2017)

- Εάν a, b, c είναι διαφορετικοί μη-αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί, να δείξετε ότι:

$$\frac{a^2}{(b-c)^2} + \frac{b^2}{(c-a)^2} + \frac{c^2}{(b-a)^2} > 2$$

2Γ: Η χρήση των συναρτήσεων στις ανισότητες

Θα μελετήσουμε κάποιες κατηγορίες ανισοτήτων που χρησιμοποιούν τα θεωρήματα που αναφέρθηκαν στο κεφάλαιο των συναρτήσεων. Θα τα μελετήσουμε σε αυτή την ενότητα.

Μια συνάρτηση f (δυο φορές παραγωγίσιμη) είναι κυρτή σε ένα σύνολο, εάν η δεύτερη παράγωγος της είναι μη-αρνητικός για όλες τις τιμές του συνόλου. Δηλαδή $f'' \geq 0$ Ομοίως μια συνάρτηση f λέγεται κοίλη εάν $f'' \leq 0$

Υπάρχουν 2 ανισότητες που αφορούν κοίλες η κυρτές συναρτήσεις.

Ανισότητα 1: Η ανισότητα Τζένσεν

Αν η συνάρτηση f είναι κυρτή στο σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών και $a_1, a_2, \dots, a_n, x_1, \dots, x_n$ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί έτσι ώστε:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$$

τότε έχουμε ότι:

$$a_1 \cdot f(x_1) + \dots + a_n \cdot f(x_n) \geq f(a_1 x_1 + \dots + a_n x_n)$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνον αν $x_1 = \dots = x_n$ (f είναι αυστηρά κυρτά)

Αν f είναι κοίλη η ανισότητα αντιστρέφεται.

Η ανισότητα είναι πολύ χρήσιμη όταν

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n = \frac{1}{n}$$

Θα μελετούμε μια άσκηση από τον διεθνή ολυμπιάδα (IMO) που χρησιμοποιεί την ανισότητα Τζένσεν.

Παράδειγμα: Εάν a, b, c είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, να δείξετε ότι:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1$$

(IMO)

Η ανισότητα είναι ομοιογενής (γιατί;).

Άρα έστω ότι $a + b + c = 1$

Τώρα θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Συνήθως σε ασκήσεις ολυμπιάδων δεν μπορούμε να χρησιμοποιούμε την ανισότητα Τζένσεν άμεσα. Πρέπει να αλλάζουμε την άσκηση με ένα από τα εργαλεία της προηγούμενης ενότητας

Έχουμε πως $f''(x) = \frac{3}{4x^{\frac{5}{2}}} > 0$ για κάθε θετικό πραγματικό x . Άρα η συνάρτηση είναι κυρτή.

Τώρα από την ανισότητα Τζένσεν έχουμε:

$$\begin{aligned} & af(a^2 + 8bc) + bf(b^2 + 8ca) + cf(c^2 + 8ab) \\ & \geq f(a(a^2 + 8bc) + b(b^2 + 8ca) + c(c^2 + 8ab)) \\ & \Rightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq \frac{1}{\sqrt{a^3 + b^3 + c^3 + 24abc}} \end{aligned}$$

Αρκεί να δείξουμε ότι $\sqrt{a^3 + b^3 + c^3 + 24abc} \leq 1$

$$\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 + 24abc \leq 1$$

$$\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 + 24abc \leq (a + b + c)^3$$

$$\Leftrightarrow 24abc \leq 3(a + b)(b + c)(c + a)$$

$$\Leftrightarrow (a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$$

Που είναι αληθής από την ανισότητα AM-GM

Γράφουμε την ανισότητα σε ομοιογενή μορφή

Ανισότητα 2: Η ανισότητα Karamata

Δίνονται θετικοί πραγματικοί αριθμοί $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$ έτσι ώστε $[x_1, x_2, \dots, x_n] \succ [y_1, y_2, \dots, y_n]$.

Εάν μια συνάρτηση f είναι κυρτή στο σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών, τότε $f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \geq f(y_1) + f(y_2) + \dots + f(y_n)$

Εάν f είναι κοίλη η ανισότητα αντιστρέφεται.

Παράδειγμα: Εάν a, b, c είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, να δείξετε ότι:

$$\sqrt[5]{a + b} + \sqrt[5]{b + c} + \sqrt[5]{c + a} \geq \sqrt[5]{2a} + \sqrt[5]{2b} + \sqrt[5]{2c}$$

Χωρίς βλάβη τις γενικότητας έστω ότι $a \geq b \geq c$

Έχουμε ότι $[2a, 2b, 2c] \succ [a + b, c + a, b + c]$

Επίσης η συνάρτηση $f(x) = \sqrt[5]{x}$ είναι κοίλη (αφού $f''(x) = -\frac{4}{25x^{\frac{9}{5}}} < 0$)

Άρα από την ανισότητα Karamata, έχουμε

$$\sqrt[5]{a+b} + \sqrt[5]{b+c} + \sqrt[5]{c+a} \geq \sqrt[5]{2a} + \sqrt[5]{2b} + \sqrt[5]{2c}$$

Προβλήματα 2Γ

1. Εάν a, b, c είναι μη-αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί έτσι ώστε $a + b + c = abc - 2$, να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης:
 $a^2 + b^2 + c^2$
2. Εάν a, b, c είναι πλευρές ενός τριγώνου, να δείξετε ότι:

$$\frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{c+a-b} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

Σύνθετα Προβλήματα

1. Εάν a, b, c, d είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί έτσι ώστε

$a + b + c + d = 2$, να δείξετε ότι:

$$\frac{(a+c)^2}{ad+bc} + \frac{(b+d)^2}{ac+bd} + 4 \geq 4 \left(\frac{a+b+1}{c+d+1} + \frac{c+d+1}{a+b+1} \right)$$

(Διαγωνισμός Επιλογής Ομάδας Περσίας)

2. Εάν x, y, z είναι πραγματικοί αριθμοί έτσι ώστε $x + y + z = 0$

Να δείξετε ότι:

$$\frac{x(x+2)}{2x^2+1} + \frac{y(y+2)}{2y^2+1} + \frac{z(z+2)}{2z^2+1} \geq 0$$

(BMO)

3. Εάν a, b, c είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί έτσι ώστε

$ab + bc + ca = 1$, να δείξετε ότι:

$$\sqrt{a^3 + a} + \sqrt{b^3 + b} + \sqrt{c^3 + c} \geq 2\sqrt{a + b + c}$$

(Διαγωνισμός Επιλογής Ομάδας Περσίας)

4. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του k , έτσι ώστε η ανισότητα

$$\left(\frac{2a}{a-b}\right)^2 + \left(\frac{2b}{b-c}\right)^2 + \left(\frac{2c}{c-a}\right)^2 + k \geq 4 \left(\frac{2a}{a-b} + \frac{2b}{b-c} + \frac{2c}{c-a}\right)$$

Να ισχύει για όλους τους διαφορετικούς πραγματικούς αριθμούς a, b, c

(Διαγωνισμός Επιλογής Ομάδας Περσίας)

5. Εάν a, b, c είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί έτσι ώστε

$\min(ab, bc, ca) \geq 1$, να δείξετε ότι:

$$\sqrt[3]{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)} \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 + 1$$

(IMO Shortlist)

6. Αν a, b και c είναι μη-αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί έτσι ώστε

$a^2 + b^2 + c^2 = a + b + c$, να δείξετε ότι

$$\frac{a+1}{\sqrt{a^5+a+1}} + \frac{b+1}{\sqrt{b^5+b+1}} + \frac{c+1}{\sqrt{c^5+c+1}} \geq 3$$

(JBMO Shortlist)

7. Να βρείτε όλους τους ακέραιους $n \geq 3$ για τους οποίους υπάρχουν

πραγματικοί αριθμοί $a_1, a_2, \dots, a_{n+2}$ που ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$a_{n+1} = a_1, \quad a_{n+2} = a_2 \quad \text{και} \quad a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2} \quad \text{για} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

(IMO 2018)

8. Εάν x, y, z είναι μη-αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί έτσι ώστε $x^2 + y^2 + z^2 = 2(xy + yz + zx)$, να δείξετε ότι:

$$\frac{x + y + z}{3} \geq \sqrt[3]{2xyz}$$

(2^{ος} γύρος Ολυμπιάδας Περσίας)

9. Εάν a, b, c είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί έτσι ώστε $abc = 1$ να δείξετε ότι:

$$\frac{a + b + c}{3} \geq \frac{a}{a^2b + 2} + \frac{b}{b^2c + 2} + \frac{c}{c^2a + 2}$$

(Σλοβενία 2018)

10. Εάν a, b, c είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί έτσι ώστε $abc = 1$ να δείξετε ότι:

$$\frac{a + b}{(a + b + 1)^2} + \frac{b + c}{(b + c + 1)^2} + \frac{c + a}{(c + a + 1)^2} \geq \frac{2}{a + b + c}$$

(3^{ος} γύρος Περσικής μαθηματικής Ολυμπιάδας)

11. Εάν a, b, c είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί έτσι ώστε

$$a + b + c = 4\sqrt[3]{abc}, \text{ να δείξετε ότι:}$$

$$2(ab + bc + ca) + 4 \min(a^2, b^2, c^2) \geq a^2 + b^2 + c^2$$

(USA Team Selection Test 2018)

Ασκήσεις Εμπλουτισμού

1. Εάν a, b, c είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί έτσι ώστε $abc = 1$ να δείξετε ότι:

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq 1$$

(IMO 2000)

2. Εάν a, b, c είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί έτσι ώστε $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ να δείξετε ότι:

$$\frac{1}{(2a + b + c)^2} + \frac{1}{(a + 2b + c)^2} + \frac{1}{(a + b + 2c)^2} \leq \frac{3}{16}$$

(IMO Shortlist 2009)

3. Εάν a, b, c, d είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί έτσι ώστε $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 4$, να δείξετε ότι:

$$(a + b)^3 + (c + d)^3 + 2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \geq 4 \left(\sum_{sym} ab \right)$$

(3^{ος} γύρος Περσικής Ολυμπιάδας)

4. Εάν a, b, c είναι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί έτσι ώστε $a + b + c = abc$, να δείξετε ότι:

$$\sum_{cyc} \left(\frac{a^2 - 1}{a} \right)^2 \geq 4$$

(3^{ος} γύρος Περσικής Ολυμπιάδας)

5. Εάν x, y, z είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί να δείξετε ότι:

$$\frac{2x^2 + xy}{(y + \sqrt{zx} + x)^2} + \frac{2y^2 + yz}{(z + \sqrt{xy} + x)^2} + \frac{2z^2 + zx}{(x + \sqrt{yz} + y)^2} \geq 1$$

(Κορέα 2012)

6. Εάν x, y είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί και ο n είναι θετικός ακέραιος έτσι ώστε $x^n + y^n = 1$, να δείξετε ότι:

$$\left(\sum_{k=1}^n \frac{1 + x^{2k}}{1 + x^{4k}} \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1 + y^{2k}}{1 + y^{4k}} \right) < \frac{1}{(1-x)(1-y)}$$

(IMO Shortlist 2007)

7. Εάν a, b, c είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί έτσι ώστε $xy + yz + zx = 3xyz$, να δείξετε ότι:

$$x^2y + y^2z + z^2x \geq 2(x + y + z) - 3$$

(BMO 2014)

8. Εάν a, b, c είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί να δείξετε ότι:

$$\frac{a^2b(b-c)}{a+b} + \frac{b^2c(c-a)}{b+c} + \frac{c^2a(a-b)}{c+a} \geq 0$$

(BMO 2010)

9. Εάν a, b, c είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί έτσι ώστε

$$a + b + c + ab + bc + ca + abc = 7 \text{ να δείξετε ότι:}$$

$$\sqrt{a^2 + b^2 + 2} + \sqrt{b^2 + c^2 + 2} + \sqrt{c^2 + a^2 + 2} \geq 6$$

(JBMO Shortlist)

10. Εάν a, b, c είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί έτσι ώστε $abc = 8$ να δείξετε ότι:

$$\frac{ab+4}{a+2} + \frac{bc+4}{b+2} + \frac{ca+4}{c+2} \geq 6$$

(JBMO Shortlist)

Λύσεις: Σύνθετα προβλήματα

1.

Από την ανισότητα Cauchy-Schwartz, έχουμε

$$\frac{(a+c)^2}{ad+bc} + \frac{(b+d)^2}{ac+bd} \geq \frac{(a+b+c+d)^2}{ad+ac+bc+bd} = \frac{4}{(a+b)(c+d)}$$

Αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\frac{4}{(a+c)(b+d)} + 4 \geq 4 \left(\frac{a+b+1}{c+d+1} + \frac{c+d+1}{a+b+1} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(a+b)(c+d)} + 1 \geq \frac{a+b+1}{c+d+1} + \frac{c+d+1}{a+b+1}$$

Θέτουμε $a+b=\lambda$ και $c+d=\mu$ όπου $\mu+\lambda=2$

Αρκεί να δείξουμε ότι $\frac{1}{\mu\lambda} + 1 \geq \frac{\lambda+1}{\mu+1} + \frac{\mu+1}{\lambda+1}$

$$\Leftrightarrow \frac{\mu\lambda+1}{\mu\lambda} \geq \frac{(\lambda+1)^2 + (\mu+1)^2}{\mu\lambda + \mu + \lambda + 1}$$

$$\Leftrightarrow (\mu\lambda+1)(\mu\lambda+3) \geq \mu\lambda(\lambda+1)^2 + \mu\lambda(\mu+1)^2$$

$$\Leftrightarrow (\mu\lambda+1)(\mu\lambda+3) - \mu\lambda((\mu+\lambda)^2 - 2\mu\lambda + 6) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \mu^2\lambda^2 + 4\mu\lambda + 3 - \mu\lambda(10 - 2\mu\lambda) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 3\mu^2\lambda^2 - 6\mu\lambda + 3 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 3(\mu\lambda - 1)^2 \geq 0$$

Που είναι αληθής. Άρα ισχύει η ανισότητα

2.

Καταρχάς έχουμε ότι:

$$\frac{x(x+2)}{2x^2+1} = \frac{(2x+1)^2 - (2x^2+1)}{2(2x^2+1)} = \frac{(2x+1)^2}{2(2x^2+1)} - \frac{1}{2}$$

Άρα η ανισότητα γράφεται:

$$\frac{(2x+1)^2}{2x^2+1} + \frac{(2y+1)^2}{2y^2+1} + \frac{(2z+1)^2}{2z^2+1} \geq 3$$

Από την ανισότητα Cauchy-Schwartz, έχουμε:

$$x^2 = \frac{x^2}{3} + \frac{2x^2}{3} = \frac{(y+z)^2}{3} + \frac{2x^2}{3} \leq \frac{2(y^2+z^2)}{3} + \frac{2x^2}{3} = \frac{2(x^2+y^2+z^2)}{3}$$

Άρα

$$\frac{(2x+1)^2}{2x^2+1} \geq \frac{(2x+1)^2}{\frac{4}{3}(x^2+y^2+z^2)+1} = \frac{3(2x+1)^2}{4(x^2+y^2+z^2)+3}$$

$$\Rightarrow \sum_{cyc} \frac{(2x+1)^2}{2x^2+1} \geq \sum_{cyc} \frac{3(2x+1)^2}{4(x^2+y^2+z^2)+3}$$

Αλλά έχουμε

$$\sum_{cyc} \frac{3(2x+1)^2}{4(x^2+y^2+z^2)+3} = 3 \left(\frac{4x^2+4y^2+4z^2+3+4x+4y+4z}{4(x^2+y^2+z^2)+3} \right) = 3$$

(καθώς $x+y+z=0$)

Άρα ισχύει η ανισότητα.

3.

Γράφουμε την ανισότητα σε ομοιογενή μορφή και έχουμε:

$$\sum_{cyc} \sqrt{a^3 + a(ab+bc+ca)} \geq 2\sqrt{(a+b+c)(ab+bc+ca)}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \sqrt{a(a+b)(a+c)} \geq 2\sqrt{(a+b+c)(ab+bc+ca)}$$

Υψώνοντας τα δυο μέλη στο τετράγωνο το ζητούμενο γράφεται:

$$\begin{aligned} & \sum_{cyc} a^3 + 2 \sum_{cyc} \left(\sqrt{a(a+b)(a+c)} \times \sqrt{b(b+c)(b+a)} \right) \\ & \geq 3 \sum_{cyc} (a^2b + ab^2) + 9abc \end{aligned}$$

Όμως από την ανισότητα Cauchy Schwartz

$$\begin{aligned} & \sqrt{a(a+b)(a+c)} \times \sqrt{b(b+c)(b+a)} \\ & = \sqrt{(a^3 + a^2b + a^2c + abc)(ab^2 + b^3 + b^2c + abc)} \geq a^2b + ab^2 + abc + abc \end{aligned}$$

Άρα

$$\sum_{cyc} a^3 + 2 \sum_{cyc} \left(\sqrt{a(a+b)(a+c)} \times \sqrt{b(b+c)(b+a)} \right)$$

$$\geq \sum_{cyc} a^3 + 2 \sum_{cyc} (a^2b + ab^2 + 2abc)$$

Άρα αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\sum_{cyc} a^3 + 2 \sum_{cyc} (a^2b + ab^2) + 12abc \geq 3 \sum_{cyc} (a^2b + ab^2) + 9abc$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} a^3 + 3abc \geq \sum_{cyc} (a^2b + ab^2)$$

Που είναι η ανισότητα Schur.

Άρα ισχύει το ζητούμενο.

4.

$$\text{Έστω ότι } x = \frac{2a}{a-b}, y = \frac{2b}{b-c} \text{ και } z = \frac{2c}{c-a}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{2} - \frac{b}{2a}, \frac{1}{y} = \frac{1}{2} - \frac{c}{2b} \text{ και } \frac{1}{z} = \frac{1}{2} - \frac{a}{2c}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{x} = 1 - \frac{b}{a}, \frac{2}{y} = 1 - \frac{c}{b} \text{ και } \frac{2}{z} = 1 - \frac{a}{c}$$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{2}{x}\right) \left(1 - \frac{2}{y}\right) \left(1 - \frac{2}{z}\right) = 1$$

$$\Rightarrow xy + yz + zx = 2(x + y + z) - 4$$

Πρέπει να βρούμε την ελάχιστη τιμή του k , έτσι ώστε

$$x^2 + y^2 + z^2 + k \geq 4(x + y + z)$$

$$\Leftrightarrow (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx) + k \geq 4(x + y + z)$$

$$\Leftrightarrow (x + y + z)^2 - 4(x + y + z) + 8 + k \geq 4(x + y + z)$$

$$\Leftrightarrow (x + y + z)^2 + 8 + k \geq 8(x + y + z)$$

$$\xLeftrightarrow[t=x+y+z] t^2 - 8t + (8 + k) \geq 0$$

Η παράσταση πρέπει να έχει αρνητική διακρίνουσα.

$$\Delta = 64 - 4(8 + k) \leq 0$$

$$\Rightarrow 8 + k \geq 16$$

$$k \geq 8$$

Άρα $k_{min} = 8$ (και η ανισότητα ισχύει για $k = 8$)

5.

Η ανισότητα γράφεται:

$$\ln \sqrt[3]{(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)} \leq \ln \left(\left(\frac{a + b + c}{3} \right)^2 + 1 \right)$$

$$\frac{1}{3} \ln(a^2 + 1) + \frac{1}{3} \ln(b^2 + 1) + \frac{1}{3} \ln(c^2 + 1) \leq \ln \left(\left(\frac{a + b + c}{3} \right)^2 + 1 \right) \quad : (1)$$

Θεωρούμε η συνάρτηση $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

Και η ανισότητα γράφεται:

$$\frac{1}{3} f(a) + \frac{1}{3} f(b) + \frac{1}{3} f(c) \leq f \left(\frac{a + b + c}{3} \right)$$

$$\text{Έχουμε } f''(x) = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$

Άρα f είναι κοίλη εάν $x \geq 1$.

Θα προχωρήσουμε με το παρακάτω λήμμα.

Λήμμα: Εάν $ab \geq 1$ έχουμε:

$$f \left(\frac{a + b}{2} \right) \geq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

Απόδειξη:

$$f \left(\frac{a + b}{2} \right) \geq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \ln \left(\left(\frac{a + b}{2} \right)^2 + 1 \right) \geq \frac{\ln(a^2 + 1) + \ln(b^2 + 1)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a + b}{2} \right)^2 + 1 \geq \sqrt{(a^2 + 1)(b^2 + 1)}$$

$$\Leftrightarrow \left(\left(\frac{a + b}{2} \right)^2 + 1 \right)^2 - (a^2 + 1)(b^2 + 1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^4 + b^4 + 4ab^3 + 4a^3b - 10a^2b^2 - 8a^2 - 8b^2 + 16ab}{16} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^4 + b^4 + 4ab(a^2 + b^2) + 16ab \geq 10a^2b^2 + 8a^2 + 8b^2$$

$$\Leftrightarrow (a - b)^2(a^2 + b^2 + 6ab - 8) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a - b)^2((a - b)^2 + 8(ab - 1)) \geq 0$$

Που είναι αληθής

Τώρα από το λήμμα έχουμε:

$$f(a) + f(b) + f(c) \leq f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f\left(\frac{b+c}{2}\right) + f\left(\frac{c+a}{2}\right)$$

$$\text{Αφού } \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \text{ έχουμε } \frac{a+b}{2} \geq 1, \frac{b+c}{2} \geq 1, \frac{c+a}{2} \geq 1$$

δηλαδή από την ανισότητα Τζένσεν:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f\left(\frac{b+c}{2}\right) + f\left(\frac{c+a}{2}\right) \leq 3f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)$$

Άρα

$$f(a) + f(b) + f(c) \leq 3f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

6.

$$\text{Έχουμε ότι } x^5 + x + 1 = (x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1)$$

Από την ανισότητα AM-GM έχουμε:

$$\sqrt{(x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1)} \leq \frac{(x^2 + x + 1) + (x^3 - x^2 + 1)}{2} = \frac{(x+1)(x^2 - x + 2)}{2}$$

Δηλαδή εάν η παράσταση λέγεται A, θα έχουμε

$$A \geq \frac{2}{x^2 - x + 2} + \frac{2}{x^2 - x + 2} + \frac{2}{x^2 - x + 2}$$

Από την ανισότητα Cauchy-Schwartz έχουμε:

$$\frac{A}{2} \geq \frac{(1+1+1)^2}{x^2 + x^2 + x^2 - x - x - x + 6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

$$\text{Άρα } A \geq 3$$

7.

Η σχέση γράφεται

$$a_i a_{i+1} a_{i+2} + a_{i+2} = a_{i+2}^2$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n a_i a_{i+1} a_{i+2} + \sum_{i=1}^n a_{i+2} = \sum_{i=1}^n a_{i+2}^2$$

Έστω ότι $a_{n+3} = a_3$, $a_{n+4} = a_4$ κ.τ.λ. Τότε η σχέση γράφεται:

$$\sum_{i=1}^n a_i a_{i+1} a_{i+2} + \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n a_i^2$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n a_i(a_{i+1}a_{i+2} + 1) = \sum_{i=1}^n a_i^2$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n a_i a_{i+3} = \sum_{i=1}^n a_i^2$$

Από την ανισότητα AM-GM:

$$a_i a_{i+3} \leq \frac{a_i^2 + a_{i+3}^2}{2}$$

Δηλαδή

$$\sum_{i=1}^n a_i a_{i+3} \leq \sum_{i=1}^n a_i^2$$

Άρα ισχύει η ισότητα. Με άλλα λόγια $a_i = a_{i+3}$.

Εάν $3 \nmid n$, τότε ευκολά μπορούμε να αποδείξουμε ότι όλοι οι αριθμοί είναι ίσοι, αφού η ακολουθία έχει περίοδο 3. Αυτό δεν μπορεί να ισχύει καθώς η σχέση γράφεται $x^2 - x + 1 = 0$ το οποίο δεν έχει πραγματική λύση.

Εάν $3|n$, τότε η ακολουθία $(2, -1, -1, 2, -1, -1, 2, \dots)$ ικανοποιεί την σχέση.

8.

Έστω ότι $x = a^2$, $y = b^2$ και $z = c^2$, $a, b, c \geq 0$

Η συνθήκη γράφεται:

$$a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2 = 0$$

Από την ταυτότητα De-Moivre αυτή γράφεται

$$(a + b + c)(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) = 0$$

Εάν $a + b + c = 0$ τότε $a = b = c = 0$ και η ανισότητα ισχύει φανερά.

Έτσι, χωρίς βλάβη της γενικότητας έστω ότι $a + b - c = 0 \Rightarrow a + b = c$

Η ανισότητα γράφεται:

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \geq \sqrt[3]{2a^2b^2c^2}$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + (a + b)^2 \geq 3\sqrt[3]{2a^2b^2(a + b)^2}$$

$$\Leftrightarrow (2a^2 + 2b^2 + 2ab)^3 \geq 54a^2b^2(a + b)^2$$

$$\Leftrightarrow 4(a^2 + ab + b^2)^3 - 27a^2b^2(a + b)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 4a^6 + 4b^6 + 12a^5b + 12ab^5 - 3a^4b^2 - 3a^2b^4 - 26a^3b^3 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 4a^6 + 4b^6 + 12a^5b + 12ab^5 \geq 3a^4b^2 + 3a^2b^4 + 26a^3b^3$$

Από την ανισότητα AM-GM

$$12a^5b + 12ab^5 \geq 24a^3b^3 \quad : (1)$$

και

$$a^6 + b^6 \geq 2a^3b^3 \quad : (2)$$

Επίσης από την ανισότητα Muirhead (αφού $[6,0] \succ [4,2]$) έχουμε:

$$3a^6 + 3b^6 \geq 3a^4b^2 + 3a^2b^4 \quad : (3)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις ανισότητες (1), (2) και (3) έχουμε

$$4a^6 + 4b^6 + 12a^5b + 12ab^5 \geq 3a^4b^2 + 3a^2b^4 + 26a^3b^3$$

Άρα η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

9.

Η ανισότητα γράφεται:

$$\frac{1}{b\alpha + \frac{2}{\alpha}} + \frac{1}{bc + \frac{2}{b}} + \frac{1}{ca + \frac{2}{c}} \leq \frac{a+b+c}{3}$$

$$\stackrel{abc=1}{\iff} \frac{1}{\frac{1}{c} + \frac{2}{a}} + \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{2}{b}} + \frac{1}{\frac{1}{b} + \frac{2}{c}} \leq \frac{a+b+c}{3}$$

Όμως από την ανισότητα AM-HM:

$$\frac{3}{\frac{1}{c} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a}} \leq \frac{2a+c}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{c} + \frac{2}{a}} \leq \frac{2a+c}{9}$$

Άρα:

$$\frac{1}{\frac{1}{c} + \frac{2}{a}} + \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{2}{b}} + \frac{1}{\frac{1}{b} + \frac{2}{c}} \leq \frac{2a+c}{9} + \frac{2b+a}{9} + \frac{2c+b}{9} = \frac{a+b+c}{3}$$

Δηλαδή το ζητούμενο ισχύει.

10.

Αρχικά από την ανισότητα Cauchy-Schwartz:

$$\begin{aligned} & ((a+b) + (b+c) + (c+a)) \left(\frac{a+b}{(a+b+1)^2} + \frac{b+c}{(b+c+1)^2} + \frac{c+a}{(c+a+1)^2} \right) \\ & \geq \left(\frac{a+b}{a+b+1} + \frac{b+c}{b+c+1} + \frac{c+a}{c+a+1} \right)^2 \end{aligned}$$

Αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\frac{a+b}{a+b+1} + \frac{b+c}{b+c+1} + \frac{c+a}{c+a+1} \geq 2$$

$$\Leftrightarrow 3 - \left(\frac{a+b}{a+b+1} + \frac{b+c}{b+c+1} + \frac{c+a}{c+a+1} \right) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a+b+1} + \frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{c+a+1} \leq 1$$

Γράφοντας αυτή την ανισότητα σε ομοιογενή μορφή:

$$\sum_{cyc} \frac{1}{a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{4}{3}}a^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}c^{\frac{2}{3}}} \leq \frac{1}{a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}c^{\frac{2}{3}}}$$

Θέτουμε $a = x^3, b = y^3, c = z^3$ και έχουμε:

$$\sum_{cyc} \frac{1}{x^4yz + y^4xz + x^2y^2z^2} \leq \frac{1}{x^2y^2z^2}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{1}{x^3 + y^3 + xyz} \leq \frac{1}{xyz}$$

Όμως από την ανισότητα Muirhead έχουμε:

$$a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2, \text{ καθώς } [3,0] > [2,1]$$

Άρα:

$$\sum_{cyc} \frac{1}{x^3 + y^3 + xyz} \leq \sum_{cyc} \frac{1}{x^2y + y^2x + xyz} = \frac{1}{x+y+z} \left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \right)$$

$$= \frac{1}{x+y+z} \frac{x+y+z}{xyz} = \frac{1}{xyz}$$

Δηλαδή η ανισότητα ισχύει

11.

Η ανισότητα και η συνθήκη είναι ομοιογενείς, άρα έστω ότι $abc = 1$

Δηλαδή έχουμε $a + b + c = 4$

Επίσης χωρίς βλάβη της γενικότητας έστω ότι:

$$a \geq b \geq c$$

Το ζητούμενο γράφεται:

$$2(ab + bc + ca) + 4c^2 \geq a^2 + b^2 + c^2$$

$$\Leftrightarrow 2(ab + bc + ca) \geq a^2 + b^2 - 3c^2$$

$$\Leftrightarrow (a + b + c)^2 \geq 2a^2 + 2b^2 - 2c^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - c^2 \leq 8$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - (4 - a - b)^2 \leq 8$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - (a^2 + b^2 + 16 - 8a - 8b + 2ab) \leq 8$$

$$\Leftrightarrow 8(a + b) - 2ab - 16 \leq 8$$

$$\Leftrightarrow 4a + 4b - ab \leq 12$$

$$\Leftrightarrow 4(4 - c) - \frac{1}{c} \leq 12$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{c} + 4c \geq 4$$

Που ισχύει από την ανισότητα AM-GM, καθώς

$$\frac{1}{c} + 4c \geq 2\sqrt{4} = 4$$

Άρα ισχύει η ανισότητα.

Λύσεις: Προβλήματα 2Α

1.

Έχουμε ότι

$$\frac{a^3}{b^2 - bc + c^2} + \frac{b^3}{c^2 - ca + a^2} + \frac{c^3}{a^2 - ab + b^2} = \sum_{cyc} \frac{a^4}{ab^2 - abc + ac^2}$$

Από την ανισότητα Cauchy-Schwartz έχουμε:

$$\sum_{cyc} \frac{a^4}{ab^2 - abc + ac^2} \geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{ab^2 + ac^2 + bc^2 + ba^2 + ca^2 + cb^2 - 3abc}$$

Επίσης από την ανισότητα AM-GM:

$$a + b + c \geq \frac{3(ab + bc + ca)}{a + b + c}$$

Άρα αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{ab^2 + ac^2 + bc^2 + ba^2 + ca^2 + cb^2 - 3abc} \geq a + b + c$$

$$\Leftrightarrow (a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq (a + b + c)(ab^2 + ac^2 + bc^2 + ba^2 + ca^2 + cb^2 - 3abc)$$

$$\Leftrightarrow a^4 + b^4 + c^4 \geq a^3b + a^3c + b^3c + b^3a + c^3b + c^3a - abc^2 - ab^2c - a^2bc$$

$$\Leftrightarrow a^4 + b^4 + c^4 + abc(a + b + c) \geq ab(a^2 + b^2) + bc(b^2 + c^2) + ca(c^2 + a^2)$$

Που είναι η ανισότητα Schur.

Άρα ισχύει η ανισότητα.

2.

Από την ανισότητα AM-ΓΜ έχουμε ότι

$$\frac{1}{1 + 2b^2c} = 1 - \frac{2b^2c}{1 + b^2c + b^2c} \geq 1 - \frac{2b^2c}{3\sqrt[3]{b^4c^2}} = 1 - \frac{2\sqrt[3]{b^2c}}{3}$$

Όμως ξανά από την ανισότητα AM-ΓΜ:

$$1 - \frac{2\sqrt[3]{b^2c}}{3} \geq 1 - \frac{1}{3} \times \frac{2(b + b + c)}{3} = 1 - \frac{4b + 2c}{9}$$

Άρα

$$\sum_{cyc} \frac{1}{1+2b^2c} \geq \sum_{cyc} \left(1 - \frac{4b+2c}{9}\right) = 3 - \frac{((4b+2c) + (4c+2a) + (4a+2b))}{9}$$

$$= 3 - \frac{18}{9} = 1$$

3.

Από την ανισότητα AM-GM έχουμε $4abc \leq c(a+b)^2$, δηλαδή

$$\frac{8}{(a+b)^2 + 4abc} \geq \frac{8}{(a+b)^2(c+1)}$$

Επίσης από την ανισότητα Cauchy-Schwartz έχουμε:

$$\frac{8}{(a+b)^2(c+1)} \geq \frac{8}{2(a^2+b^2)(c+1)} = \frac{4}{(a^2+b^2)(c+1)}$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα AM-GM έχουμε

$$\frac{8}{(a+b)^2 + 4abc} + \frac{a^2+b^2}{2} \geq \frac{4}{(a^2+b^2)(c+1)} + \frac{a^2+b^2}{2} \geq 2\sqrt{\frac{2}{c+1}}$$

Εχούμε:

$$2\sqrt{\frac{2}{c+1}} \geq \frac{8}{c+3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{8}{c+1} \geq \frac{64}{(c+3)^2}$$

$$\Leftrightarrow (c+3)^2 \geq 8(c+1)$$

$$\Leftrightarrow c^2 - 2c + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (c-1)^2 \geq 0 \text{ που ισχύει.}$$

Άρα

$$\frac{8}{(a+b)^2 + 4abc} + \frac{a^2+b^2}{2} \geq \frac{8}{c+3}$$

$$\Rightarrow \frac{8}{(a+b)^2+4abc} + \frac{8}{(b+c)^2+4abc} + \frac{8}{(c+a)^2+4abc} + a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{8}{a+3} + \frac{8}{b+3} + \frac{8}{c+3}$$

4.

Καταρχάς θα δείξουμε ότι :

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{ab + bc + ca} \geq \frac{a + b + c}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3(a^3 + b^3 + c^3) \geq (a + b + c)(ab + bc + ca)$$

$$\Leftrightarrow 3a^3 + 3b^3 + 3c^3 \geq a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b + 3abc : (1)$$

Από την ανισότητα Muirhead καθώς $[3,0,0] \succ [2,1,1]$ έχουμε

$$2(a^3 + b^3 + c^3) \geq a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b$$

Επίσης από την ανισότητα AM-GM έχουμε:

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$$

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε την ανισότητα (1)

Τώρα

$$\sum_{cyc} \frac{a^3 + b^3 + c^3}{ab + bc + ca} \geq \frac{a + b + c}{3} + \frac{b + c + d}{3} + \frac{c + d + a}{3} + \frac{d + a + b}{3} = 3$$

(αφού $a + b + c + d = 1$) και το ζητούμενο αποδείχθηκε.

Λύσεις: Προβλήματα 2B

1.

Από την ανισότητα AM-GM έχουμε ότι:

$$\sum_{cyc} \frac{2}{(a+1)^2 + b^2 + 1} = \sum_{cyc} \frac{2}{a^2 + b^2 + 2a + 2} \leq \sum_{cyc} \frac{2}{2ab + 2a + 2}$$

$$\Rightarrow \sum_{cyc} \frac{2}{(a+1)^2 + b^2 + 1} \leq \sum_{cyc} \frac{1}{ab + a + 1}$$

Τώρα αφού $abc = 1$ έστω ότι $a = \frac{x}{y}$, $b = \frac{y}{z}$, $c = \frac{z}{x}$ και έτσι

$$\sum_{cyc} \frac{1}{ab + a + 1} = \sum_{cyc} \frac{yz}{xy + yz + zx} = \frac{xy + yz + zx}{xy + yz + zx} = 1$$

Άρα το ζητούμενο αποδείχθηκε.

2.

Έστω ότι $a = \sqrt{\frac{x}{yz}}$, $b = \sqrt{\frac{y}{zx}}$, $c = \sqrt{\frac{z}{xy}}$, $x + y + z = 1$

Η ανισότητα γράφεται:

$$\left(\sum_{cyc} \sqrt{\left(1 + \frac{x}{yz}\right) \left(1 + \frac{y}{zx}\right)} \right) \geq \sqrt{\left(1 + \frac{x}{yz}\right) \left(1 + \frac{y}{zx}\right) \left(1 + \frac{z}{xy}\right)} + 4$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{cyc} \frac{1}{z} \sqrt{\left(z + \frac{x}{y}\right) \left(z + \frac{y}{x}\right)} \right) \geq \frac{1}{xyz} \sqrt{(x + yz)(y + zx)(z + xy)} + 4$$

Αφού $x + y + z = 1$, έχουμε $x + yz = x(x + y + z) + yz = (x + y)(x + z)$

Έχουμε,

$$\frac{1}{xyz} \sqrt{(x + yz)(y + zx)(z + xy)} + 4 = \frac{(x + y)(y + z)(z + x) + 4xyz}{xyz}$$

$$= \frac{(x + y + z)(xy + yz + zx) + 3xyz}{xyz} = \frac{xy + yz + zx + 3xyz}{xyz}$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + 3$$

Επίσης,

$$\sum_{cyc} \frac{1}{z} \sqrt{\left(z + \frac{x}{y}\right)\left(z + \frac{y}{x}\right)} = \sum_{cyc} \frac{1}{z} \sqrt{z^2 + \frac{zx^2 + zy^2}{xy} + 1}$$

Άρα η ανισότητα γράφεται:

$$\sum_{cyc} \left(\frac{1}{z} \sqrt{z^2 + 1 + \frac{zx^2 + zy^2}{xy}} \right) \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + 3$$

Από την ανισότητα AM-GM:

$$\frac{zx^2 + zy^2}{xy} \geq 2z$$

Άρα:

$$\begin{aligned} \sum_{cyc} \left(\frac{1}{z} \sqrt{z^2 + 1 + \frac{zx^2 + zy^2}{xy}} \right) &\geq \sum_{cyc} \left(\frac{1}{z} \sqrt{z^2 + 2z + 1} \right) = \sum_{cyc} \left(\frac{1}{z} (z + 1) \right) \\ &= \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + 3 \end{aligned}$$

Άρα το ζητούμενο αποδείχθηκε.

3.

Γράφουμε τις παρονομαστές σε ομοιογενή μορφή και έχουμε:

$$A = \frac{1}{a^5 + b^5 + c^3ab} + \frac{1}{b^5 + c^5 + a^3bc} + \frac{1}{c^5 + a^5 + b^3ca} \leq 1$$

Από την ανισότητα Muirhead έχουμε: $a^5 + b^5 \geq a^4b + b^4a$

καθώς $[5,0] \succ [4,1]$. Άρα:

$$A \leq \frac{1}{a^4b + b^4a + c^3ab} + \frac{1}{b^4c + c^4b + a^3bc} + \frac{1}{c^4a + a^4c + b^3ca}$$

$$A \leq \frac{1}{a^3 + b^3 + c^3} \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right)$$

$$A \leq \frac{1}{a^3 + b^3 + c^3} \cdot \frac{a + b + c}{abc}$$

$$A \leq \frac{a + b + c}{a^3 + b^3 + c^3}$$

Αρκεί να δείξουμε ότι

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a + b + c$$

Γράφουμε την ζητούμενη ανισότητα σε ομοιογενή μορφή και έχουμε:

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^{\frac{5}{3}}b^{\frac{2}{3}}c^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{5}{3}}a^{\frac{2}{3}}c^{\frac{2}{3}} + c^{\frac{5}{3}}b^{\frac{2}{3}}a^{\frac{2}{3}}$$

Θέτουμε $a = x^3$, $b = y^3$, $c = z^3$ και η ανισότητα γράφεται

$$x^9 + y^9 + z^9 \geq x^5y^2z^2 + y^5x^2z^2 + z^5y^2x^2$$

Που ισχύει από την ανισότητα Muirhead καθώς: $[9,0,0] \succ [5,2,2]$.

4.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας έστω ότι: $a > b > c$

Θέτουμε: $c = z$, $b = y + z$, $a = x + y + z$

Η ανισότητα γράφεται:

$$\frac{(x + y + z)^2}{y^2} + \frac{(y + z)^2}{(x + y)^2} + \frac{z^2}{x^2} > 2$$

Προφανώς αφού $z \geq 0$, έχουμε

$$\frac{(x + y + z)^2}{y^2} + \frac{(y + z)^2}{(x + y)^2} + \frac{z^2}{x^2} \geq \frac{(x + y)^2}{y^2} + \frac{y^2}{(x + y)^2}$$

Επίσης από την ανισότητα AM-ΓΜ έχουμε

$$\frac{(x+y)^2}{y^2} + \frac{y^2}{(x+y)^2} \geq 2 \text{ με ισότητα αν και μόνον αν } x + y = y \Rightarrow x = 0 \text{ που δεν μπορεί να ισχύει.}$$

Άρα

$$\frac{(x + y)^2}{y^2} + \frac{y^2}{(x + y)^2} > 2$$

Και το ζητούμενο αποδείχθηκε.

Λύσεις: Προβλήματα 2Γ

1.

Γράφουμε την σχέση $a + b + c = abc - 2$ ως εξής:

$$a + b + c + 3 = abc + 1$$

$$\Leftrightarrow 2(a + b + c) + 3 = abc + a + b + c + 1$$

$$\Leftrightarrow 2(a + b + c) + ab + bc + ca + 3 = abc + ab + bc + ca + a + b + c + 1$$

$$\Leftrightarrow (a + 1)(b + 1)(c + 1) = (a + 1)(b + 1) + (b + 1)(c + 1) + (c + 1)(a + 1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} = 1$$

Τώρα θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x+1}$

Έχουμε πως η συνάρτηση είναι κυρτή ($f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3} > 0$)

Άρα από την ανισότητα Τζένσεν έχουμε:

$$\frac{1}{3} \left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} \right) \geq \frac{1}{\frac{a+b+c}{3} + 1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \geq \frac{1}{\frac{a+b+c}{3} + 1}$$

$$\Rightarrow a + b + c \geq 6$$

Επίσης από την ανισότητα Cauchy-Schwartz

$$3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2$$

$$\Rightarrow 3(a^2 + b^2 + c^2) \geq 36$$

$$\Rightarrow \boxed{a^2 + b^2 + c^2 \geq 12}$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνον αν $a = b = c = 2$

2.

Αφού a, b, c είναι πλευρές ενός τριγώνου έστω ότι $a = x + y, b = y + z$ και $c = z + x$

Η ανισότητα γράφεται:

$$\frac{1}{2x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{2z} \geq \frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x}$$

Χωρίς βλάβη τις γενικότητας έστω ότι $x \geq y \geq z$

Έχουμε ότι $[2x, 2y, 2z] \succ [x+y, z+x, y+z]$

Επίσης η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$ είναι κυρτή (αφού $f''(x) = \frac{2}{x^3} > 0$)

Άρα από την ανισότητα Karamata, έχουμε

$$\frac{1}{2x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{2z} \geq \frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x}$$

και το ζητούμενο ισχύει

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: Πολυώνυμα

Εισαγωγή στα πολυώνυμα

Ορισμός : Ένα πολυώνυμο είναι μια παράσταση με μη-αρνητικούς ακέραιους εκθέτες.

$f(x) = 2x^{10} - 5x^7 + 2x + 2018$ είναι πολυώνυμο και

$g(x, y) = x^2 + 2018xy + y^3$ είναι πολυώνυμο αλλά

$\varphi(x) = 3x^{-2} + 34x + 1 = \frac{3}{x^2} + 34x + 1$ δεν είναι πολυώνυμο και

$P(x) = \sqrt[3]{x+5} + 5 = (x+5)^{\frac{1}{3}} + 5$ δεν είναι πολυώνυμο.

Βαθμός ενός πολυωνύμου P ως προς μια ή περισσότερες μεταβλητές, είναι ο μεγαλύτερος από τους βαθμούς των όρων του ως προς τη μεταβλητή ή τις μεταβλητές αυτές. Βαθμός ενός πολυωνύμου είναι ο μεγαλύτερος από τους βαθμούς των όρων του ως προς όλες τις μεταβλητές του. Συμβολίζεται με $\deg(P)$

Ευκλείδεια διαίρεση πολυώνυμων

Αν $p(x)$ και $d(x)$ είναι πολυώνυμα, τότε υπάρχουν μοναδικά πολυώνυμα $q(x)$ και $r(x)$ τέτοια ώστε: $p(x) = d(x)q(x) + r(x)$ και $\deg(r) < \deg(d)$
Εάν $r(x) \equiv 0$, τότε λέμε ότι $d(x)$ διαιρεί το $p(x)$, δηλαδή $d(x) | p(x)$

Ορισμός: Οι ρίζες του πολυώνυμου είναι παραστάσεις για τις οποίες η τιμή του πολυώνυμου ισούται με 0. Δηλαδή, αν α είναι ρίζα του πολυώνυμου $p(x)$ τότε $p(\alpha) = 0$.

Γεγονός: Αν α είναι ρίζα του πολυώνυμου $p(x)$ τότε $p(x)$ διαιρείται με $x - \alpha$.

3Α- Μιγαδικοί αριθμοί

Μέχρι τώρα στο σχολείο υποθέσατε ότι η εξίσωση $x^2 + 1 = 0$ δεν έχει λύση. Συνήθως όταν μας δίνεται την εξίσωση γράφουμε ότι δεν έχει **πραγματική λύση**. Αλλά εάν προσπαθούμε να λύσουμε την εξίσωση έχουμε τις λύσεις $x = \sqrt{-1}$ και $x = -\sqrt{-1}$ οι οποίες δεν είναι πραγματικές αλλά είναι αριθμοί! Ορίζουμε τον αριθμό $i = \sqrt{-1}$ και κατά συνέπεια μπορούμε να ορίζουμε ένα καινούργιο σύνολο αριθμών.

Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$, είναι το σύνολο των αριθμών της μορφής $z = a + bi$ όπου a και b είναι πραγματικοί αριθμοί και $i = \sqrt{-1}$

Το a λέγεται ο πραγματικός μέρος του αριθμού και συμβολίζεται με $Re(z)$. Το b λέγεται το φανταστικό μέρος του αριθμού και συμβολίζεται με $Im(z)$

Εάν $Re(z)$ και $Im(z)$ είναι ακέραιοι τότε ο αριθμός z λέγεται ακέραιος του Gauss.

Ο αριθμός $a - bi$ λέγεται ο συζυγής του z και συμβολίζεται με $\bar{z}$

Η απολυτή τιμή $|z|$ του μιγαδικού αριθμού ορίζεται ως $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Εάν $z_1 = a_1 + b_1i$ και $z_2 = a_2 + b_2i$ τότε:

- $z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)i$
- $z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$
- $\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} \right) + \left(\frac{b_1 a_2 - b_2 a_1}{a_2^2 + b_2^2} \right) i$
- $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$
- $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2} \right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}, z_2 \neq 0$
- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
- $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$
- $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, z_2 \neq 0$

Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει:

- $z \bar{z} = |z|^2$

Προβλήματα 3Α

1. Εάν z_1 και z_2 είναι δυο μιγαδικοί αριθμοί, να δείξετε ότι:
$$|z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$$
2. Έστω ότι p και q είναι μιγαδικοί αριθμοί. Εάν z_1 και z_2 είναι οι ρίζες του πολυώνυμου $P(x) = x^2 + px + q^2$ και $|z_1| = |z_2|$, να δείξετε ότι ο αριθμός $\frac{p}{q}$ είναι πραγματικός.

3B-Οι ρίζες του Πολυωνύμου

Στην αρχή του κεφαλαίου δώσαμε τον ορισμό της ρίζας ενός πολυωνύμου. Σε αυτή την ενότητα θα μελετούμε μερικά θεωρήματα που αφορούν τις ρίζες ενός πολυωνύμου.

Ο θεμελιώδης θεώρημα της Άλγεβρας

Κάθε πολυώνυμο βαθμό n έχει ακριβώς n μιγαδικές ρίζες $r_1, r_2, \dots, r_n$ και μπορεί να γραφθεί ως $a(x - r_1)(x - r_2) \dots (x - r_n)$

Σχόλια:

- Εάν το βαθμό του πολυώνυμου είναι περιττό τότε έχει τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα.
- Εάν ένα πολυώνυμο P βαθμού το πολύ n έχει περισσότερες από n ρίζες τότε $P(x) \equiv 0$

Το θεώρημα ρητής ρίζας για πολυώνυμα

Εάν ένα πολυώνυμο $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ έχει ρητή ρίζα $\frac{p}{q}$ τότε έχουμε $q|a_n$ και $p|a_0$

Παράδειγμα: Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - x^2 + 1$ δεν έχει ρητή ρίζα.

Εάν το πολυώνυμο έχει ρητή ρίζα $\frac{p}{q}$ τότε πρέπει να έχουμε $q|2$ και $p|1$ άρα οι δυνατές ρητές ρίζες είναι $\pm 1, \pm \frac{1}{2}$. Αλλά για αυτές τις τιμές το πολυώνυμο δεν μηδενίζεται. Άρα δεν έχει ρητή ρίζα.

Το Θεώρημα μέσης τιμής

Δίνεται ένα πολυώνυμο P και το διάστημα (α, β) . Εάν $P(\alpha)P(\beta) < 0$ τότε το πολυώνυμο έχει τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα $r \in (\alpha, \beta)$

Σχόλιο: Το συμπέρασμα του θεωρήματος ισχύει πιο γενικά στην περίπτωση όπου P είναι οποιαδήποτε συνεχές συνάρτηση στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

Παράδειγμα: Έστω ότι α, β και γ είναι πραγματικοί αριθμοί έτσι ώστε $\gamma(\alpha + \beta + \gamma) < 0$. Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x) = \alpha x^3 + \beta x + \gamma$ έχει πραγματική ρίζα στο διάστημα $[0, 1]$.

Έχουμε ότι

$$P(0) = \gamma$$

$$\text{και } P(1) = \alpha + \beta + \gamma$$

$$\text{Αφού } \gamma(\alpha + \beta + \gamma) < 0$$

$$\Rightarrow P(0)P(1) < 0$$

Άρα από το θεώρημα μέσης τιμής έχουμε πραγματική ρίζα στο διάστημα $[0,1]$

Το Θεώρημα του Vieta

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ με ρίζες $r_1, r_2, \dots, r_n$. Τότε οι ρίζες ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$r_1 + r_2 + \dots + r_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$r_1 r_2 \dots r_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} r_{i_1} r_{i_2} \dots r_{i_k} = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}$$

Προβλήματα 3B

1. Δίνεται θετικός ρητός αριθμός q . Δυο μυρμήγκια είναι αρχικά στο ίδιο σημείο X του επιπέδου. Στο n -οστό λεπτό κάθε μυρμήγκι επιλέγει να κινηθεί προς τον βορρά, τον νότο, την ανατολή ή τη δύση και να διανύσει την απόσταση q^n μέτρα. Μετά από ένα ακέραιο αριθμό λεπτών τα μυρμήγκια είναι στο ίδιο σημείο του επιπέδου και δεν κινήθηκαν ακριβώς στην ίδια διαδρομή. Να βρείτε τις δυνατές τιμές του q .
(BMO 2018)
2. Δίνεται το πολυώνυμο $f(x) = x^2 + 2007x + 1$. Να δείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο n η εξίσωση $\underbrace{f(f(\dots(f(x))\dots))}_{n\text{-φορές}} = 0$ έχει τουλάχιστον μια πραγματική λύση.
(Βραζιλία 2007)
3. Να δείξετε ότι δεν υπάρχει πολυώνυμο $P(x)$ που ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες ταυτόχρονα:
 - $\deg(P(x)) > 3$
 - Όλοι οι συντελεστές του $P(x)$ είναι 1 ή -1
 - Όλες οι ρίζες του $P(x)$ είναι πραγματικές.

3Γ- Πολυώνυμα με ακέραιους συντελεστές

Ένα χρήσιμο θεώρημα για πολυώνυμα!

Εάν a και b είναι διαφορετικοί ακέραιοι και P είναι ένα πολυώνυμο με ακέραιους συντελεστές τότε ισχύει ότι $a - b | P(a) - P(b)$

Παράδειγμα: Να βρείτε όλους τα πολυώνυμα f με πραγματικούς συντελεστές, έτσι ώστε για κάθε $a, b, c \in \mathbb{Z}$ να έχουμε:

$$a + b + c | f(a) + f(b) + f(c)$$

Έχουμε ότι $x - y | f(x) - f(y)$

$$\Rightarrow a + b + c | f(c) - f(-a - b)$$

$$\text{Επίσης } a + b + c | f(a) + f(b) + f(c)$$

$$\text{Άρα } a + b + c | f(a) + f(b) + f(-a - b)$$

$$\text{Για } c \rightarrow \infty, \text{ πρέπει να έχουμε: } f(a) + f(b) + f(-a - b) = 0$$

$$\text{Δηλαδή, } f(a) + f(b) = -f(-a - b)$$

Θέτοντας $a = b = x$, η σχέση γράφεται:

$$2f(x) = -f(-2x)$$

Έστω ότι $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$. Πρέπει να έχουμε:

$$2a_n = -(-2)^n a_n$$

$$2a_{n-1} = -(-2)^{n-1} a_{n-1}$$

....

$$2a_1 = 2a_1$$

$$a_0 = -a_0$$

$$\Rightarrow a_n = 0, a_{n-1} = 0, \dots, a_2 = 0 \text{ και } a_0 = 0$$

$$\Rightarrow f(x) = Cx \text{ όπου } C \text{ είναι σταθερό.}$$

Γράφουμε την ιδιότητα σε μια μορφή έτσι ώστε στο αριστερό μέλος να έχουμε το $a + b + c$

Για να λύσουμε μια εξίσωση με άγνωστα πολυώνυμα, μια καλή ιδέα είναι να συγκρίνουμε τους συντελεστές στα δύο μέλη.

Ανάγωγα πολυώνυμα

Ορισμός: Ένα πολυώνυμο $P(x)$ με συντελεστές στο σύνολο A λέγεται ανάγωγο εάν δεν μπορεί να γραφθεί σαν $f(x)g(x)$ όπου $f(x)$ και $g(x)$ είναι πολυώνυμα με συντελεστές στο σύνολο A . Συνήθως μελετούμε εάν ένα πολυώνυμο είναι ανάγωγο στο σύνολο των ακεραίων. Σύμφωνα με ένα λήμμα (**Λήμμα του Gauss**) έχουμε ότι **εάν ένα πολυώνυμο είναι ανάγωγο στο σύνολο των ακεραίων, τότε είναι ανάγωγο στο σύνολο των ρητών**. Ένα παράδειγμα ανάγωγου πολυωνύμου στους ακέραιους είναι το πολυώνυμο $P(x) = x^2 - 2$. Αλλά το πολυώνυμο αυτό δεν είναι ανάγωγος στους πραγματικούς αριθμούς αφού:

$$x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$$

Πότε ένα πολυώνυμο είναι ανάγωγο;

Στην άλγεβρα υπάρχουν κάποια κριτήρια που δείχνουν ότι ένα πολυώνυμο είναι ανάγωγο. Θα μελετήσουμε 2 από αυτά παρακάτω:

Κριτήριο Eisenstein: Δίνεται ένα πολυώνυμο

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ με ακέραιους συντελεστές. Εάν υπάρχει πρώτος αριθμός p έτσι ώστε $p|a_0, p|a_1, \dots, p|a_{n-1}, p \nmid a_n$ και $p^2 \nmid a_0$, τότε το πολυώνυμο $P(x)$ είναι ανάγωγο στους ακέραιους.

Παράδειγμα: Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + x^3 + \dots + x + 1$ είναι ανάγωγο στους ρητούς αριθμούς.

Έχουμε ότι εάν το πολυώνυμο $P(x)$ είναι ανάγωγο τότε και μόνον τότε το πολυώνυμο $P(x + 1)$ είναι ανάγωγο.

Θα δείξουμε ότι το πολυώνυμο

$$P(x + 1) = \frac{(x + 1)^5 - 1}{(x + 1) - 1} = \frac{x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x}{x}$$

$$= x^4 + 5x^3 + 10x^2 + 10x + 5$$

είναι ανάγωγο.

Αυτό ισχύει από το κριτήριο Eisenstein διότι

$5|5, 5|10$ και $5 \nmid 1, 25 \nmid 5$ και το 5 είναι πρώτος αριθμός.

Κριτήριο Perron: Δίνεται ένα πολυώνυμο

$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ με ακέραιους συντελεστές, όπου $P(0) \neq 0$. Εάν $|a_{n-1}| > 1 + |a_{n-2}| + \dots + |a_1| + |a_0|$, τότε το πολυώνυμο $P(x)$ είναι ανάγωγο στους ακέραιους.

Παράδειγμα: Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$ είναι ανάγωγο στους ακέραιους για $n > 1$. (IMO 1993)

Από το κριτήριο Perron, αφού $5 > 3 + 1$ το πολυώνυμο είναι ανάγωγο στους ακέραιους.

Σχόλιο: Αυτή την άσκηση όταν έχει δοθεί, το κριτήριο Perron δεν ήταν τόσο γνωστό. Άλλος τρόπος επίλυσης της άσκησης είναι με το κριτήριο Eisenstein και το θεώρημα ρητής ρίζας. Αυτή η απόδειξη αφήνεται στον αναγνώστη.

Προβλήματα 3Γ

1. Να δείξετε ότι δεν υπάρχει μη-σταθερό πολυώνυμο $f(x)$ με ακέραιους συντελεστές έτσι ώστε $f(n)$ είναι πρώτος αριθμός για κάθε θετικό ακέραιο n .
(PEN, Μολδαβία TST)

Σύνθετα προβλήματα

1. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^{2010} \pm x^{2009} \pm \dots \pm x \pm 1$ το οποίο δεν έχει πραγματική ρίζα. Να βρείτε το μέγιστο πλήθος των συντελεστών του πολυωνύμου που είναι -1
(3^{ος} γύρος Μαθηματικής Ολυμπιάδας Περσίας)
2. Δίνονται τα πολυώνυμα $f(x) = a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ και $g(x) = \frac{a_1}{2-1}x + \frac{a_2}{2^2-1}x^2 + \dots + \frac{a_n}{2^n-1}x^n$ όπου $a_1, a_2, \dots, a_n$ είναι πραγματικοί αριθμοί και n είναι θετικός ακέραιος. Εάν οι αριθμοί 1 και 2^{n+1} είναι ρίζες του $g(x)$, να δείξετε ότι το $f(x)$ έχει πραγματική ρίζα ρ , όπου $0 < \rho < 2^n$
(U.S.A Team Selection Test)
3. Να βρείτε όλα τα πολυώνυμα $p(x)$, έτσι ώστε:
 $(x+1) \cdot p(x-1) = (x-1) \cdot p(x+1)$ για κάθε πραγματικό αριθμό x .
(Βιβλίο Μαθηματικής Ολυμπιάδας Περσίας)
4. Έστω ότι a, b, c, d, e και f είναι θετικοί ακέραιοι και έστω $S = a + b + c + d + e + f$. Εάν έχουμε ότι $S | abc + def$ και $S | ab + bc + ca - de - ef - fd$, να δείξετε ότι ο αριθμός S δεν είναι πρώτος.
(IMO Shortlist)
5. Να βρείτε όλα τα πολυώνυμα $P(x, y)$ με πραγματικούς συντελεστές, έτσι ώστε
 $P(ab, c^2 + 1) + P(bc, a^2 + 1) + P(ca, b^2 + 1) = 0$
για κάθε $a, b, c \in R$
(Διαγωνισμός Επιλογής Ομάδας Περσίας)
6. Έστω ότι a, b, k και n είναι θετικοί ακέραιοι με $n \geq 2$ έτσι ώστε $a^2 - 2b < nk^{\frac{2}{n}}$
Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x) = x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \dots + k$ έχει μη-θετική ρίζα.
Σημείωση: Οι άλλες συντελεστές του πολυωνύμου είναι τυχαίοι μιγαδικοί αριθμοί.

Ασκήσεις για εξάσκηση

1. Να βρείτε όλα τα πολυώνυμα $P(x, y, z)$ με πραγματικούς συντελεστές έτσι ώστε για κάθε 3 πραγματικούς αριθμούς a, b και c με $abc = 1$ έχουμε:

$$P\left(a + \frac{1}{a}, b + \frac{1}{b}, c + \frac{1}{c}\right) = 0$$

(Problems from the book- Andreescu and Dorinescu)

2. Έστω ότι $P(x)$ είναι ένα πολυώνυμο τρίτου βαθμού με ακέραιους συντελεστές. Εάν υπάρχουν άπειροι ακέραιοι x και y έτσι ώστε $xP(x) = yP(y)$, να δείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ακέραια ρίζα.
(IMO Shortlist 2003)

3. Να βρείτε όλα τα πολυώνυμα $P(x)$ με πραγματικούς συντελεστές έτσι ώστε για κάθε πραγματικό αριθμό x έχουμε:

$$P(x + P(x)) = P(x) + P(P(x))$$

4. Εάν a, b, c είναι πραγματικοί αριθμοί, να δείξετε ότι τουλάχιστον ένα από τα παρακάτω πολυώνυμα έχει **δύο** πραγματικές ρίζες.

$$p_1(x) = x^2 + (b - c)x + (c - a)$$

$$p_2(x) = x^2 + (c - a)x + (a - b)$$

$$p_3(x) = x^2 + (a - b)x + (b - c)$$

(Ολυμπιάδα Ρωσίας)

5. Να βρείτε όλα τα πολυώνυμα $P(x)$ με πραγματικές συντελεστές έτσι ώστε για κάθε πραγματικό αριθμό x έχουμε:

$$(x - 2)P(x + 2) + (x + 2)P(x - 2) = 2xP(x)$$

(Ελβετία 2016)

Λύσεις: Σύνθετα προβλήματα

1.

Έχουμε $\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = +\infty$ και αφού το $P(x)$ δεν έχει πραγματική ρίζα (η γραφική του παράσταση δεν τέμνει τον άξονα x) πρέπει να έχουμε $P(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δηλαδή $P(1) > 0$. Αυτό σημαίνει ότι έχουμε το πολύ 1005 συντελεστές -1. (Εάν έχουμε 1006 ή περισσότερους, πρέπει να έχουμε και $P(1) < 0$)

Τώρα δίνουμε μια κατασκευή για 1005 συντελεστές ίσους με -1 .

Θα αποδείξουμε ότι το πολυώνυμο $h(x) = x^{2010} - x^{2009} + x^{2008} \dots - x + 1$ δεν έχει πραγματική ρίζα.

Από την ταυτότητα $x^{2011} + 1 = (x + 1)(x^{2010} - x^{2009} + \dots - x + 1)$ και το γεγονός ότι η εξίσωση $x^{2011} + 1 = 0$ έχει την μοναδική πραγματική ρίζα $x = -1$, προκύπτει πως το $h(x)$ δεν έχει πραγματική ρίζα.

2.

Λήμμα: $f(x) = g(2x) - g(x)$

Απόδειξη:

$$g(2x) - g(x) = \sum_{i=1}^n \frac{2^i x^i a_i}{2^i - 1} - \sum_{i=1}^n \frac{a_i x^i}{2^i - 1} = \sum_{i=1}^n a_i x^i = f(x)$$

Έστω ότι το $f(x)$ δεν έχει θετική πραγματική ρίζα στο διάστημα $(0, 2^n)$. Πρέπει να έχουμε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, 2^n)$ ή $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, 2^n)$, (αλλιώς λόγω το θεώρημα μέσης τιμής θα έχουμε πραγματική ρίζα στο δεδομένο διάστημα).

Εάν $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, 2^n)$, τότε

$$g(2^i) = g(2^{i-1}) - f(2^{i-1}) > g(2^{i-1})$$

Όπου $n \geq i \geq 1$

$$\text{Έτσι } g(2^{n+1}) = g(2^n) - f(2^n) \geq g(2^n)$$

$$\text{Και } g(2^n) > g(2^{n-1}) > \dots > g(1)$$

Άρα $0 = g(2^{n+1}) > g(1) = 0$, που είναι άτοπο.

Ομοίως εάν $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, 2^n)$, τότε

$$0 = g(2^{n+1}) \leq g(2^n) < \dots < g(0) = 0$$

Που είναι άτοπο.

Άρα έχουμε πραγματική ρίζα στο διάστημα $(0, 2^n)$

3.

$$\text{Αν } x = \pm 1 \Rightarrow 2p(0) = 0 \Rightarrow p(0) = 0$$

Από το Θεμελιώδες Θεώρημα Άλγεβρας

$$p(x) = a_n(x - 0)(x - \rho_2) \dots (x - \rho_n) \Rightarrow \boxed{p(x) = x \cdot q(x)}$$

$$(x + 1) \cdot p(x - 1) = (x - 1) \cdot p(x + 1)$$

$$\Rightarrow (x + 1)(x - 1) \cdot q(x - 1) = (x + 1)(x - 1) \cdot q(x + 1)$$

$$\stackrel{x \neq \pm 1}{\implies} q(x - 1) = q(x + 1) \Rightarrow q(x) = q(x + 2)$$

Αν $q(0) = c$, τότε

$$q(0) = q(0 + 2) = q(0 + 4) = \dots = n$$

Θέτουμε $g(x) = q(x) - c$, έτσι $g(x) = 0$ για άπειρες τιμές του $x = 2k$, δηλαδή από το Θεμελιώδες Θεώρημα Άλγεβρας

$$g(x) = 0 \Rightarrow q(x) = c$$

Άρα, $\boxed{p(x) = cx}$ για $c \in \mathbb{R}$

4.

Οι παραστάσεις $a + b + c + d + e + f$, $ab + bc + ca - de - ef - fd$ και $abc + def$ μας θυμίζουν τους τύπους του Vieta. Πιο συγκεκριμένα, είναι συντελεστές του πολυώνυμου

$$P(x) = (x + a)(x + b)(x + c) - (x - d)(x - e)(x - f)$$

Με άλλα λόγια οι συντελεστές του πολυωνύμου $P(x)$ είναι πολλαπλάσιοι του S .

Άρα $S | P(d)$

$$\Rightarrow S | (a + d)(b + d)(c + d)$$

Αλλά εάν S είναι πρώτος τότε S διαιρεί ένα από τους θετικούς ακέραιους $a + d$, $b + d$ ή $c + d$, που είναι άτοπο καθώς $S = a + b + c + d + e + f$ είναι μεγαλύτερος από αυτούς τους θετικούς ακέραιους. Άρα ο S δεν είναι πρώτος.

Σχόλιο: Αυτό το πρόβλημα είναι όπως μια άσκηση θεωρίας αριθμών, αλλά λύνεται εύκολα με την χρήση της άλγεβρας!

5.

Θέτουμε $a = b = c = 0$ και έχουμε $P(0,1) = 0$

Επίσης θέτουμε $a = b = 0$ και έχουμε $P(0, c^2 + 1) = 0 \Rightarrow x|P(x, y)$

Ξανά θέτουμε $c = 0$ και έχουμε $P(ab, 1) = 0 \Rightarrow y - 1|P(x, y)$

Δηλαδή $\boxed{P(x, y) = x(y - 1)Q(x, y)}$

Τώρα η εξίσωση γράφεται :

$$abc^2Q(ab, c^2 + 1) + a^2bcQ(bc, a^2 + 1) + ab^2cQ(ca, b^2 + 1) = 0$$

$$\Rightarrow cQ(ab, c^2 + 1) + aQ(bc, a^2 + 1) + bQ(ca, b^2 + 1) = 0$$

Σε αυτή την εξίσωση θέτουμε $a = b = 0$ και παίρνουμε

$$cQ(0, c^2 + 1) = 0 \Rightarrow x|Q(x, y) \Rightarrow Q(x, y) = xH(x, y)$$

Ξαναγράφουμε η εξίσωση και έχουμε

$$H(ab, c^2 + 1) + H(bc, a^2 + 1) + H(ca, b^2 + 1) = 0$$

Εδώ πήραμε την αρχική εξίσωση και έτσι επαγωγικά έχουμε:

$$x^{2N}(y - 1)^N|P(x, y) \text{ για κάθε θετικό ακέραιο } N$$

Αφήνοντας το N να τείνει στο $+\infty$ έχουμε

$$\boxed{P(x, y) \equiv 0}$$

6.

Έστω ότι όλες οι ρίζες του πολυώνυμου είναι θετικές και τα ονομάζουμε:

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$$

Από τους τύπους του Vieta έχουμε:

$$\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n = -a$$

$$\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n = (-1)^n k$$

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \xi_i \xi_j = b$$

Για αυτό μπορούμε να γράψουμε:

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2 = (\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n)^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \xi_i \xi_j = a^2 - 2b$$

$$\Rightarrow \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2 < n^2 k^{\frac{2}{n}}$$

Επίσης από την ανισότητα Cauchy-Schwartz:

$$(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n)^2 \leq n(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2)$$

$$\Rightarrow (\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n)^2 < n^2 k^{\frac{2}{n}}$$

Από την άλλη πλευρά αφού $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ είναι θετικές από την ανισότητα AM-GM έχουμε:

$$\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n \geq n\sqrt[n]{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n} \Rightarrow (\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n)^2 \geq n^2 k^{\frac{2}{n}} \text{ άτοπο.}$$

Άρα έχουμε και μη θετική ρίζα.

Λύσεις: Προβλήματα 3Α

1.

$$\begin{aligned} |z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2}) + (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) \\ &= (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}) + (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1} z_2 + |z_1|^2 + |z_2|^2 - z_1 \overline{z_2} - \overline{z_1} z_2 \\ &= 2(|z_1|^2 + |z_2|^2) \end{aligned}$$

2.

Έστω ότι $|z_1| = |z_2| = r$. Ξέρουμε $S = z_1 + z_2 = -p$ και $P = z_1 z_2 = q^2$. Άρα:

$$\begin{aligned} \frac{p^2}{q^2} &= \frac{(z_1 + z_2)^2}{z_1 z_2} = \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} + 2 = \frac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}} + \frac{z_2 \overline{z_1}}{z_1 \overline{z_1}} + 2 = \frac{z_1 \overline{z_2}}{r^2} + \frac{z_2 \overline{z_1}}{r^2} \\ &= 2 + \frac{2\operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2})}{r^2} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Επίσης από ορισμό: $\operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}) \geq -|z_1 \overline{z_2}| = -r^2$

$$\Rightarrow \frac{p^2}{q^2} = 2 + \frac{2}{r^2} \operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}) \geq 2 - 2 = 0$$

Άρα ο αριθμός $\frac{p^2}{q^2}$ είναι πραγματικός.

Λύσεις: Προβλήματα 3B

1.

Θα μελετήσουμε το πρόβλημα στο καρτεσιανό επίπεδο. Στο K -οστό λεπτό η θέση ενός μυρμηγκιού στον άξονα x αλλάζει κατά q^K , $-q^K$ ή 0 . Άρα οι θέσεις των μυρμηγκιών A και B μετά από K λεπτά δίνονται με πολυώνυμα $f_A(q)$ και $f_B(q)$ με μέγιστο βαθμό K και συντελεστές $-1, 0$ και 1 . Εάν τα μυρμήγκια συναντηθούν μετά από N λεπτά, τότε έχουν την ίδια θέση. Αυτό σημαίνει ότι η εξίσωση: $f_A(q) = f_B(q)$ έχει ρητή λύση.

Το πολυώνυμο $f_A(q) - f_B(q)$ έχει συντελεστές $-2, -1, 0, 1$ και 2 , Από το θεώρημα ρητής ρίζας εάν το πολυώνυμο έχει ρητή ρίζα $\frac{p}{r}$ τότε $p|2$ και $r|2$

Άρα οι δυνατές περιπτώσεις είναι $q = 1, q = \frac{1}{2}, q = 2$

Περίπτωση 1: $q = 2$

Θα μελετούμε το πρώτο βήμα των μυρμηγκιών. Εάν ένα μυρμήγκι κινείται κατακόρυφα και ένα οριζόντια, τότε η θέση ενός μυρμηγκιού στον άξονα x θα παραμένει πάντα άρτια και του άλλου περιττή (αφού το ένα έχει κινηθεί μια μονάδα αρχικά και το άλλο δεν έχει κινηθεί σε αυτό τον άξονα). Άρα τα μυρμήγκια δεν μπορούν να συναντηθούν. Εάν κινούνται τα δύο κατακόρυφα προς αντίθετες κατευθύνσεις, τότε η θέση ενός μυρμηγκιού στον άξονα x έχει την μορφή $4\alpha + 1$ και η θέση του άλλου είναι στην μορφή $4\beta - 1$ και άρα δεν μπορούν να συναντηθούν ποτέ. Το ίδιο ισχύει εάν κινούνται τα δύο οριζόντια προς αντίθετες κατευθύνσεις. Άρα πρέπει να κινούνται μαζί. Τώρα σε αυτό το βήμα είναι στο ίδιο σημείο και για παρόμοιους λόγους πρέπει να κινούνται μαζί (αφήνεται στον αναγνώστη να το δείξει). Δηλαδή επαγωγικά δεν μπορούν να συναντηθούν ποτέ.

Περίπτωση 2: $q = \frac{1}{2}$

Έστω ότι τα μυρμήγκια συναντηθούν μετά από K λεπτά. Σε αυτή την περίπτωση μεγεθύνουμε το επίπεδο 2^K φορές και βλέπουμε οι διαδρομές που κινήθηκαν τα μυρμήγκια σε αντίστροφη κατεύθυνση. Άρα έχουμε την περίπτωση 1, και καταλήγουμε σε άτοπο.

Άρα η μοναδική φανερή λύση είναι $q = 1$

2.

Έστω ότι $P(x) = \underbrace{f(f(\dots(f(x))\dots))}_{n-\text{φορές}}$

Έχουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = +\infty$

Έτσι υπάρχει αριθμός R έτσι ώστε $P(R) > 0$

Από την άλλη πλευρά η εξίσωση $f(x) = x$ έχει την λύση:

$$r = \frac{-2006 - \sqrt{2006^2 - 4}}{2} < 0$$

Τώρα

$$P(r) = \underbrace{f(f(\dots(f(r))\dots))}_{n-\text{φορές}} = \underbrace{f(f(\dots(f(r))\dots))}_{n-1-\text{φορές}} = \dots = f(r) = r < 0$$

Άρα από το θεώρημα μέσης τιμής το πολυώνυμο έχει τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα στο διάστημα (r, R)

3.

Έστω ότι το πολυώνυμο έχει βαθμό n και έχει n πραγματικές ρίζες $r_1, r_2, \dots, r_n$.

Από τους τύποι του Vieta $r_1 + r_2 + \dots + r_n = \pm 1$ (αφού όλες οι συντελεστές είναι ± 1) δηλαδή $(r_1 + r_2 + \dots + r_n)^2 = 1$. Επίσης από Vieta,

$$\sum_{i < j} r_i r_j = \pm 1$$

Τώρα έχουμε: $r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_n^2 = (r_1 + r_2 + \dots + r_n)^2 - 2 \sum_{i < j} r_i r_j = 3$ ή -1

Αφού $r_i \in \mathbb{R}$, $r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_n^2 \geq 0$. Άρα $\boxed{r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_n^2 = 3}$.

Ξανά από Vieta $(r_1 r_2 \dots r_n)^2 = 1$

Αλλά από την ανισότητα AM-GM:

$$r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_n^2 \geq n \sqrt[n]{(r_1 r_2 \dots r_n)^2} = n$$

Δηλαδή $3 \geq n$ που είναι άτοπο. Άρα δεν υπάρχει τέτοιο πολυώνυμο.

Λύσεις: Προβλήματα 3Γ

1.

Έχουμε ότι: $a - b \mid f(a) - f(b)$

$$\Rightarrow a - 1 \mid f(a) - f(1)$$

Έστω ότι $f(1) = p_0$

$$\Rightarrow a - 1 \mid f(a) - p_0$$

Θέτουμε $a = ip_0 + 1$ με i τυχαίο

$$\Rightarrow ip_0 \mid f(ip_0 + 1) - p_0$$

$$\Rightarrow p_0 \mid f(ip_0 + 1)$$

Αφού $f(ip_0 + 1)$ είναι πρώτος αριθμός, τότε $f(ip_0 + 1) = p_0$ για κάθε i

Άρα το πολυώνυμο $P(x) = f(ip_0 + 1) - p_0$ έχει άπειρες ρίζες. Αυτό είναι άτοπο αφού το f δεν είναι σταθερό. Άρα δεν υπάρχει τέτοιο πολυώνυμο.

Διάφορα Προβλήματα Άλγεβρας

1. Αν a, b και c είναι θετικοί αριθμοί έτσι ώστε $ab + bc + ac = 3$, να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{c + a^2b^2}{a + b} + \frac{b + a^2c^2}{a + c} + \frac{a + b^2c^2}{b + c}$$

(Βιβλίο Μαθηματικής Ολυμπιάδας Περσίας)

2. Δίνεται η ακολουθία $\{a_n\}$ με $a_1 = 1, a_2 = 3$ και για $v \geq 3$

$$a_v = \max\{a_p + a_{v-p} : 1 \leq p \leq v-1\}$$

Να δείξετε ότι ο γενικός τύπος της ακολουθίας δίνεται από τον τύπο:

$$a_v = \begin{cases} 3k, & n = 2k \\ 3k + 1, & n = 2k + 1 \end{cases}$$

(Β' Διαγωνισμός Επιλογής Κύπρου 2018)

3. Έστω ότι $a_1, a_2, \dots, a_n, k$ και m είναι θετικοί ακέραιοι, έτσι ώστε

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = k \text{ και } a_1 a_2 \dots a_n = M$$

Εάν $M > 1$, να δείξετε ότι το πολυώνυμο:

$$P(x) = M(x+1)^k - (x+a_1)(x+a_2) \dots (x+a_n)$$

δεν έχει θετική πραγματική ρίζα.

(IMO Shortlist 2017)

4. Δίνεται ένα πολυώνυμο $P(x)$ με βαθμό $n \geq 2$ και μη-αρνητικούς συντελεστές. Εάν a, b και c είναι μήκη πλευρών ενός τριγώνου, να δείξετε ότι οι αριθμοί $\sqrt[n]{P(a)}, \sqrt[n]{P(b)}, \sqrt[n]{P(c)}$ είναι επίσης οι πλευρές κάποιου τριγώνου.

(Ρωσία 2017)

5. Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ έτσι ώστε

$$\begin{cases} \frac{f(g(x))}{x} = \frac{1}{xf(x) - 2018} \\ \frac{g(f(x))}{x} = \frac{1}{xg(x) - 2018} \end{cases}$$

(Βιβλίο Μαθηματικής Ολυμπιάδας Περσίας- Με αλλαγές)

6. Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιούν την εξίσωση

$$f(f(x)f(y)) + f(x+y) = f(xy), \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

(IMO 2017)

7. Έστω ότι x και y είναι διαφορετικοί πραγματικοί αριθμοί έτσι ώστε $x^4 - y^4 = x - y$. Να δείξετε ότι:

$$\frac{x - y}{x^6 - y^6} \leq \frac{4}{3}(x - y)$$

(2^{ος} γύρος Περσικής μαθηματικής Ολυμπιάδας 2017)

Λύσεις: Διάφορα Προβλήματα Άλγεβρας

1.

$$\begin{aligned} A &= \frac{c + a^2 b^2}{a + b} + \frac{b + a^2 c^2}{a + c} + \frac{a + b^2 c^2}{b + c} \\ &= \frac{a^2}{ab + ac} + \frac{b^2}{ba + bc} + \frac{c^2}{cb + ca} + \frac{(ab)^2}{a + b} + \frac{(bc)^2}{b + c} + \frac{(ca)^2}{c + a} \end{aligned}$$

Από την ανισότητα Cauchy Schwartz (δύο φορές)

$$A \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+ac+bc)} + \frac{(ab+ac+bc)^2}{2(a+b+c)}$$

$$\Leftrightarrow A \geq \frac{(a+b+c)^2}{6} + \frac{9}{2(a+b+c)} : (1)$$

Και από την ανισότητα AM/GM:

$$\frac{(a+b+c)^2}{6} + \frac{9}{2(a+b+c)} \geq 2 \sqrt{\frac{9(a+b+c)}{12}} = \sqrt{3(a+b+c)}$$

$$\text{Επίσης } (a+b+c)^2 \geq 3(ab+ac+bc)$$

$$\Rightarrow a+b+c \geq 3$$

Τότε $A \geq 3$ ή $A_{\min} = 3$ με ισότητα αν-ν $a = b = c = 1$

2.

Για $n = 1$, το ζητούμενο ισχύει

Έστω ότι το ζητούμενο ισχύει για $v \in \{1, 2, 3, \dots, n-1\}$: (1)

Για $v = n$ έχουμε: $a_n = \max\{a_p + a_{n-p} : 1 \leq p \leq n-1\}$

Άρα έχουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

Περίπτωση 1: n είναι άρτιος, δηλαδή $n = 2k$.

Έχουμε ότι:

$$a_n = \max\{a_p + a_{2k-p} : 1 \leq p \leq n-1\}$$

Εάν $p = 2t$, τότε

$$a_p + a_{2k-p} = a_{2t} + a_{2(k-t)} = 3t + 3(k-t) = 3k, \text{ από (1)}$$

$$\begin{aligned} \text{Επίσης εάν } p = 2t - 1, \text{ then } a_p + a_{2k-p} &= a_{2(t-1)+1} + a_{2(k-t)+1} \\ &= 3k - 1, \text{ από (1)} \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } a_n = \max\{3k, 3k - 1\} = 3k$$

Περίπτωση 2: n είναι περιττός, δηλαδή $n = 2k + 1$.

Έχουμε ότι:

$$a_n = \max\{a_p + a_{2k-p+1} : 1 \leq p \leq n - 1\}$$

Εάν $p = 2t$, τότε

$$a_p + a_{2k-p} = a_{2t} + a_{2(k-t)+1} = 3k + 1, \text{ από (1)}$$

$$\begin{aligned} \text{Εάν } p = 2t - 1, \text{ τότε } a_p + a_{2k-p} &= a_{2(t-1)+1} + a_{2(k-t+1)} \\ &= 3k + 1 \text{ από (1)} \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } a_n = \max\{3k + 1, 3k + 1\} = 3k + 1$$

Δηλαδή το ζητούμενο ισχύει για κάθε θετικό ακέραιο n .

3.

Από την ανισότητα AM-ΓΜ για κάθε $x > 0$:

$$x + a_i = (x + 1) + \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{a_i - 1} \geq a_i(x + 1)^{\frac{1}{a_i}}$$

$$\Rightarrow \prod_{i=1}^n (x + a_i) \geq \prod_{i=1}^n a_i(x + 1)^{\frac{1}{a_i}}$$

$$\Rightarrow (x + a_1)(x + a_2) \dots (x + a_n) \geq a_1 a_2 \dots a_n (x + 1)^{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$$

$$\Rightarrow (x + a_1)(x + a_2) \dots (x + a_n) \geq M(x + 1)^k$$

$$\Rightarrow M(x + 1)^k - (x + a_1)(x + a_2) \dots (x + a_n) \leq 0$$

$$\Rightarrow P(x) \leq 0$$

Όμως η ισότητα ισχύει αν και μόνον αν $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1 \Rightarrow M = 1$ που είναι άτοπο.

Άρα

$P(x) < 0$ για κάθε $x > 0$, που σημαίνει ότι το πολυώνυμο δεν έχει θετική πραγματική ρίζα.

4.

Έστω ότι $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ και $Q(x) = \frac{P(x)}{x^n}$, δηλαδή

$$Q(x) = a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \dots + \frac{a_0}{x^n}$$

Αφού a, b και c είναι οι πλευρές ενός τριγώνου, τότε από την τριγωνική ανισότητα $b + c > a$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας έστω ότι $a \geq b \geq c > 0$

Παίρνοντας την παράγωγο του Q , έχουμε:

$$Q'(x) = -\frac{a_{n-1}}{x^2} - \frac{2a_{n-2}}{x^3} - \dots - \frac{na_0}{x^{n+1}}$$

Δηλαδή η συνάρτηση $Q(x)$ είναι φθίνουσα για κάθε $x > 0$

Άρα προφανώς έχουμε:

$$Q(a) \leq Q(b) \leq Q(c)$$

Τώρα έχουμε:

$$\sqrt[n]{P(a)} = a \sqrt[n]{Q(a)} < (b + c) \sqrt[n]{Q(a)} = b \sqrt[n]{Q(a)} + c \sqrt[n]{Q(a)}$$

$$\xrightarrow{Q(a) \leq Q(b) \leq Q(c)} \sqrt[n]{P(a)} < b \sqrt[n]{Q(b)} + c \sqrt[n]{Q(c)}$$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{P(a)} < \sqrt[n]{P(b)} + \sqrt[n]{P(c)}$$

Δηλαδή $\sqrt[n]{P(a)}, \sqrt[n]{P(b)}, \sqrt[n]{P(c)}$ είναι επίσης οι μήκη πλευρών τριγώνου.

5.

Παρατηρούμε ότι αφού $f(g(x)) > 0, g(f(x)) > 0$ τότε

$$xf(x) > 2018 \text{ και } xg(x) > 2018$$

$$\text{Δηλαδή } g(x)f(g(x)) > 2018 \text{ και } f(x)g(f(x)) > 2018$$

Γι' αυτό έχουμε: $\frac{xg(x)}{xf(x)-2018} > 2018$ και $\frac{xf(x)}{xg(x)-2018} > 2018$

Άρα,

$$xg(x) > 2018xf(x) - 2018^2 > 2018(2018xg(x) - 2018^2) - 2018^2 \\ = 2018^2xg(x) - 2018^3 - 2018^2$$

$$\Rightarrow \boxed{xg(x) < \frac{2018^3 + 2018^2}{2018^2 - 1} = \frac{2018^2}{2017}}$$

Όμοια μπορούμε να αποδείξουμε ότι $xg(x) < \frac{2018^2}{2017}$

Τώρα θα αποδείξουμε το παρακάτω γενικευμένο λήμμα:

Λήμμα:

- i. Αν $xf(x) < s$ και $xg(x) < s$ τότε $xg(x) > \frac{2018s}{s-1}$ και $xf(x) > \frac{2018s}{s-1}$
- ii. Αν $xf(x) > t$ και $xg(x) > t$ τότε $xg(x) < \frac{2018t}{t-1}$ και $xf(x) < \frac{2018t}{t-1}$

Απόδειξη

i.

Αν $xf(x) < s$ και $xg(x) < s$ τότε $g(x)f(g(x)) < s$ και $f(x)g(f(x)) < s$

Άρα $\frac{xg(x)}{xf(x)-2018} < s$ και $\frac{xf(x)}{xg(x)-2018} < s$

$$\Rightarrow xg(x) < sxf(x) - 2018s < s(sxg(x) - 2018s) - 2018s$$

$$\Rightarrow xg(x) < s^2xg(x) - 2018s^2 - 2018s \Rightarrow xg(x) > \frac{2018s}{s-1}$$

Όμοια μπορούμε να αποδείξουμε ότι $xf(x) > \frac{2018s}{s-1}$.

- ii. Η απόδειξη είναι παρόμοια του (i) και γι' αυτό αφήνεται στον αναγνώστη

Τώρα στο πρόβλημα μας ορίζουμε την ακολουθία $a_1, a_2, a_3, \dots$, ως εξής:

$$a_1 = 2018, \quad a_{n+1} = \frac{2018a_n}{a_n - 1}$$

Είναι φανερό ότι τα $xf(x)$ και $xg(x)$ είναι μεγαλύτερα και μικρότερα από τους όρους της ακολουθίας εναλλάξ. Έτσι θα αναλύσουμε τους όρους με άρτιους και περιττούς δέκτες ξεχωριστά.

Έχουμε πως:

$$a_{n+2} = \frac{2018a_{n+1}}{a_{n+1} - 1} = \frac{2018 \frac{2018a_n}{a_n - 1}}{\frac{2018a_n}{a_n - 1} - 1} = \frac{2018^2 a_n}{2017a_n + 1}$$

Είναι φανερό ότι η παραπάνω ακολουθία L , συγκλίνει προς ένα αριθμό L

$$(a_{2k-2} \geq a_{2k} \geq L \text{ και } L \geq a_{2k+1} \geq a_{2k-1})$$

Έχουμε ότι

$$L = \frac{2018^2 L}{2017L + 1} \Rightarrow 2017L^2 + L = 2018^2 L \stackrel{L \neq 0}{\Rightarrow} 2017L = (2018^2 - 1)$$

$$\Rightarrow L = \frac{2018^2 - 1}{2017} = 2019$$

Τα $xf(x)$ και $xg(x)$ είναι μεγαλύτερα και μικρότερα από τους όρους της ακολουθίας εναλλάξ, οπότε έχουμε:

$$xf(x) = xg(x) = 2019 \Rightarrow \boxed{f(x) = g(x) = \frac{2019}{x}}$$

6.

Πρώτα θέτουμε $y = 0$ και έχουμε $f(f(x)f(0)) + f(x) = f(0)$.

Έτσι βλέπουμε ότι εάν $f(0) = 0$, τότε $f \equiv 0$ που προφανώς ικανοποιεί την εξίσωση.

Ακολουθως, έστω ότι $f(0) \neq 0$.

Προσπαθούμε να βρούμε για ποια τιμή του πεδίου ορισμού, η τιμή της συνάρτησης μηδενίζεται. Έστω ότι $f(c) = 0$

Ξέρουμε ότι $x + y = xy$ για $x = c$, $y = \frac{c}{c-1}$

Γι' αυτό θέτουμε $x = c$, $y = \frac{c}{c-1}$ με $c \neq 1$ στην εξίσωση και πιάνουμε $f(0) = 0$ που είναι άτοπο.

Δηλαδή έχουμε το παρακάτω συμπέρασμα:

$$\boxed{f(a) = 0 \Leftrightarrow a = 1}$$

Επίσης, θέτοντας $x = y = 0$ στην αρχική εξίσωση πιάνουμε

$$f(f(0)^2) = 0 \Leftrightarrow f(0)^2 = 1.$$

Σε αυτό το πρόβλημα εάν η συνάρτηση f ικανοποιεί την εξίσωση, η συνάρτηση $-f$ την ικανοποιεί επίσης.

Έτσι χωρίς βλάβη της γενικότητας έστω ότι $f(0) = 1$

Στην αρχική εξίσωση θέτουμε $y = 1$, και έχουμε $f(x + 1) = f(x) - 1$

Επαγωγικά αποδεικνύεται ότι

$$f(x + n) = f(x) - n \text{ για } n \in \mathbb{Z} \text{ (η απόδειξη αφήνεται στον αναγνώστη)}$$

Τώρα θα από δείξουμε ότι η συνάρτηση f είναι ένα-προς-ένα.

Έστω ότι $f(a) = f(b)$. Τότε $f(a + k) = f(b + k) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

Θα προχωρήσουμε με το παρακάτω λήμμα.

Λήμμα: Εάν k είναι αρκετά μεγάλος πραγματικός αριθμός, τότε μπορούμε να βρούμε πραγματικοί αριθμοί m και n έτσι ώστε:

$$\begin{cases} mn = b + k \\ m + n = a + k + 1 \end{cases}$$

Απόδειξη: Λύνουμε το σύστημα εξισώσεων.

$$m(a + 1 - m) = b + k$$

$$\Rightarrow m^2 - m(a + k + 1) + b + k = 0$$

Αφού k είναι αρκετά μεγάλος, τότε η διακρίνουσα της πιο πάνω εξίσωσης είναι θετική, αποδεικνύοντας την ύπαρξη του m και κατά συνέπεια του n .

Στην αρχική εξίσωση θέτω $x = m$ και $y = n$

$$f(f(m)f(n)) + f(m + n) = f(mn)$$

$$\Rightarrow f(f(m)f(n)) + f(a + k) = f(b + k)$$

$$\Rightarrow f(f(m)f(n)) + f(a + k) - 1 = f(b + k)$$

$$\xrightarrow{f(a+k)=f(b+k)} f(f(m)f(n)) = 1$$

$$\Rightarrow f(m)f(n) = 0$$

$$\Rightarrow m = 1 \text{ ή } n = 1$$

άτοπο.

Άρα $a = b$ και η συνάρτηση είναι ένα-προς-ένα.

Τώρα στην αρχική εξίσωση θέτουμε $y = 0$, και έχουμε:

$$f(f(x)) = 1 - f(x)$$

$$\Rightarrow f(f(f(x))) = f(1 - f(x))$$

$$\Rightarrow 1 - f(f(x)) = f(1 - f(x))$$

$$\Rightarrow f(x) = f(1 - f(x))$$

$$\Rightarrow 1 - f(x) = x$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = 1 - x}$$

Όμοια έχουμε και τη λύση: $\boxed{f(x) = x - 1}$

7.

Η συνθήκη γράφεται:

$$x^4 - y^4 = x - y$$

$$\Leftrightarrow (x - y)(x + y)(x^2 + y^2) = x - y$$

$$\Leftrightarrow (x + y)(x^2 + y^2) = 1 \text{ αφού } x \neq y$$

Η ανισότητα γράφεται:

$$\frac{x - y}{x^6 - y^6} \leq \frac{4}{3}(x + y)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^4 - y^4}{x^6 - y^6} \leq \frac{4}{3}(x + y)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)}{(x^2 - y^2)(x^4 + x^2y^2 + y^4)} \leq \frac{4}{3}(x + y)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2}{x^4 + x^2y^2 + y^4} \leq \frac{4}{3}(x + y)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x^2 + y^2)^2}{x^4 + x^2y^2 + y^4} \leq \frac{4}{3}(x + y)(x^2 + y^2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x^2 + y^2)^2}{x^4 + x^2y^2 + y^4} \leq \frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow 4(x^4 + x^2y^2 + y^4) \geq 3(x^4 + 2x^2y^2 + y^4)$$

$$\Leftrightarrow x^4 + y^4 \geq 2x^2y^2$$

Που ισχύει από την ανισότητα AM-GM

Άρα ισχύει η ανισότητα.

Βιβλιογραφία

- 1) Algebraic strategies in mathematical Olympiads (Inequalities)
Mohammad Jafari – ISBN= 978-600-5230-154
- 2) Problems in number theory for mathematical Olympiads (Iranian Mathematical Olympiads)
Abbas Servatti- ISBN= 978-964-7685-87-0
- 3) 5 and 1 Chapters in inequalities
Sina Rezaei Zarei- ISBN=978-600-5695-77-9
- 4) Topics and problems in mathematical Olympiads (First Round)
Pouria Babavi and Mohammad Jafari- ISBN=978-600-7950-50-0
- 5) Some terms from polynomials
Sina Rezaei Zarei- ISBN=978-600-5695-76-2
- 6) Functional Equations in Mathematical Competitions: Problems and Solutions
Mohammad Mahdi Taheri
- 7) Η ιστοσελίδα <http://www.mathematica.gr>
- 8) Η ιστοσελίδα <https://artofproblemsolving.com>

Το παρόν βιβλίο έχει στόχο να βοηθήσει τους μαθητές που αγαπούν τα μαθηματικά και επιθυμούν να βελτιώσουν ακόμη περισσότερο την επίδοσή τους, για να συμμετέχουν με επιτυχία σε μαθηματικούς διαγωνισμούς λυκείου. Το βιβλίο εστιάζει στο μάθημα της Άλγεβρας και πιο συγκεκριμένα στα κεφάλαια των συναρτησιακών εξισώσεων, των ανισοτήτων και των πολυωνύμων. Υπάρχουν επίσης λυμένα προβλήματα τα οποία βασίζονται κυρίως σε θέματα από μαθηματικές ολυμπιάδες.

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b \Leftrightarrow e^{a+b} = e^a e^b$$

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i = (x+1)^n$$

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$