

Πάμε Ολυμπιάδα Φυσικής!

Α' ΤΕΥΧΟΣ

ΝΕΥΤΩΝΕΙΑ ΜΗΧΑΝΙΚΗ



Δάτης Καλάλη

Επιμέλεια: Στυλιανός Φωτιάδης

Πρόλογος

Η Φυσική, μία από τις παλαιότερες επιστήμες που υπάρχουν σήμερα, η ιστορία της οποίας ξεκίνησε από τον σπουδαίο επιστήμονα Θαλή. Ο Θαλής ήταν ο πρώτος Φυσικός, ο οποίος πίστεψε πως για κάθε φαινόμενο υπάρχει μια φυσική αιτία και επομένως από την θεωρία αυτή προέρχεται η λέξη «Φυσική».

Επιπλέον, ο Ηράκλειτος γύρο στις 500 π.χ., διατύπωσε ότι ο μόνος βασικός νόμος του σύμπαντος είναι ότι τίποτε δεν παραμένει στην ίδια κατάσταση επ' άπειρου.

Με τη θεωρία αυτή επισημάνθηκε ο ρόλος του χρόνου στο σύμπαν, μια από τις βασικές έννοιες της σύγχρονης Φυσικής. Από τα παραπάνω, είναι φανερό ότι η επιστήμη της Φυσικής γεννήθηκε στην Ελλάδα. Σήμερα η επιστήμη αυτή είναι μία από τις σημαντικότερες επιστήμες παγκοσμίως και λόγω της αξίας και της σημασίας της έχει ειδική θέση στο εκπαιδευτικό σύστημα. Άρα, αποφάσισα να δημοσιεύσω μια σειρά από εκπαιδευτικά βιβλία που καλύπτουν παραπάνω έννοιες από τα σχολικά βιβλία για τους μαθητές που ενδιαφέρονται για την Φυσική ή θέλουν να συμμετέχουν σε διαγωνισμούς Φυσικής. Η σειρά αυτή αποτελείται από τον τεύχος Α' (Νευτώνεια Φυσική- Κινηματική και δυναμική), τεύχος Β' (Ηλεκτρισμός) τεύχος Γ' (Θερμοδυναμική και οπτική) και τεύχος Δ' (Μηχανική στερεών σωμάτων και κύματα). Για την καλύτερη κατανόηση της σειράς αυτής, προτείνεται ο μαθητής:

1. Να διαβάσει τα κεφαλαία με την σειρά που υπάρχουν σε κάθε βιβλίο,
2. Μετά από το διάβασμα κάθε κεφαλαίου να λύσει τις ασκήσεις ενότητας και στην συνέχεια να κοιτάζουν ότι άλλο υπάρχει,
3. Να αφιερώνει χρόνο για την επίλυση των ασκήσεων και να μην τις περάσει γρήγορα,
4. Για την εκμάθηση της Φυσικής να δώσει έμφαση στην θεωρία και βασικές έννοιες της Φυσικής και όχι μόνο στους μαθηματικούς τύπους.

Τέλος, ζητώ από όλους τους ενδιαφερόμενους και μαθητές να στέλνουν τις απόψεις τους σχετικά με το βιβλίο στην ηλεκτρονική διεύθυνση:

olympiadb@yahoo.com

Με την ελπίδα της επιτυχίας όλων μαθητών,

Ο συγγραφέας,

Δάτης Καλάλη.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1: Κινηματική ----- Σελ. 4-51

Ασκήσεις ενότητας ----- Σελ. 46-47

Λύσεις ασκήσεων ενότητας----- Σελ. 48-51

Κεφάλαιο 2: Δυνάμεις ----- Σελ. 52-81

Ασκήσεις ενότητας ----- Σελ. 72-75

Λύσεις ασκήσεων ενότητας----- Σελ. 76-81

Κεφάλαιο 3: Έργο και ενέργεια ----- Σελ. 82-93

Ασκήσεις ενότητας ----- Σελ. 89-90

Λύσεις ασκήσεων ενότητας----- Σελ. 91-93

Κεφάλαιο 4: Κυκλική κίνηση ----- Σελ. 94-121

Ασκήσεις ενότητας ----- Σελ. 113-115

Λύσεις ασκήσεων ενότητας----- Σελ. 115-121

Κεφάλαιο 5: Ορμή ----- Σελ. 122-139

Ασκήσεις ενότητας ----- Σελ. 134-135

Λύσεις ασκήσεων ενότητας----- Σελ. 136-139

Κεφάλαιο 1: Κινηματική

Βασικές έννοιες για κινήσεις σε ευθεία γραμμή

Στον κόσμο υπάρχουν κινήσεις παντού! Η πτήση πουλιών, η κίνηση αυτοκίνητου ακόμα και ο ήχος.

Η πιο απλή μορφή κίνησης είναι η ευθύγραμμη κίνηση, που θα μελετηθεί σε αυτή την υπό-ενότητα.

Η έννοια του διανύσματος θέσης

Το διάνυσμα που ενώνει την θέση ενός σώματος με ένα σταθερό σημείο αναφοράς, λέγεται το διάνυσμα θέση και συμβολίζεται με $\vec{x}$. Έχει μονάδα μέτρησης το 1 m

Προσοχή 1: Το διάνυσμα θέσης ενός σώματος σε μια χρονική στιγμή δεν μας δίνει καμία πληροφορία για την κατεύθυνση κίνησης του.

Η έννοια της μετατόπισης

Έστω ότι υπάρχει ένα κινητό στην θέση x_1 . Μετά από κάποιο χρόνο έρχεται στην θέση x_2 . Λέμε ότι το κινητό έχει μετατοπιστεί κατά $x_2 - x_1$

Η Μετατόπιση συμβολίζεται με Δx

Η μετατόπιση μπορεί να είναι και αρνητική. Είναι διανυσματικό μέγεθος. Έχει μέτρο και **κατεύθυνση**.

Για παράδειγμα εάν ένα σώμα πάει από την θέση $x_1 = 2 \text{ cm}$ στην θέση $x_2 = -1 \text{ cm}$, η μετατόπιση είναι $\Delta x = -1 - 2 = -3 \text{ cm}$

Αυτό σημαίνει ότι σε αυτή την περίπτωση η κατεύθυνση της μετατόπισης είναι προς την αρνητική φορά του άξονα x .

Η έννοια της διανυόμενης απόστασης

Η διανυόμενη απόσταση είναι η απόσταση που διανύει ένα σώμα.

Η διανυόμενη απόσταση δεν εξαρτάται μόνο από την αρχική και τελική θέση, αλλά και από το μήκος της διαδρομής. Είναι μονόμετρο μέγεθος.

Η έννοια της ταχύτητας

Η ταχύτητα είναι ένα διάνυσμα, που εκφράζει τον **ρυθμό** και την κατεύθυνση **αλλαγής της θέσης**.

Η μέση ταχύτητα υπολογίζεται ως $\vec{v} = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t}$

Η μέση ταχύτητα εξαρτάται μόνο από την μετατόπιση και όχι από την διανυόμενη απόσταση.

Για παράδειγμα ο ολυμπιονίκης της κολύμβησης, μπορεί να κολυμπάει από την μια άκρη της πισίνας στην άλλη και να επιστρέφει σε 1 λεπτό. Αλλά σε αυτή την διάρκεια η μέση ταχύτητα του είναι 0, αφού η μετατόπιση του είναι 0 (επίστρεψε στην αρχική του θέση), παρόλο που είναι γρήγορος.

Παράδειγμα 1: Ένα αυτοκίνητο κινείται προς την θετική φορά του άξονα x . Στην χρονική στιγμή $t_1 = 10 \text{ s}$ περνά από το σημείο A ($x_A = -100\text{m}$), και την χρονική στιγμή $t_2 = 20 \text{ s}$ περνά από το σημείο B ($x_B = 200\text{m}$). Να βρείτε η μέση ταχύτητα του αυτοκινήτου κατά μήκος της ευθείας AB. (Οι θέσεις του άξονα x μετρούνται σε μέτρα).

Λύση

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 20 - 10 = 10 \text{ s}$$

$$\Delta x = x_B - x_A = 200 - (-100) = 300\text{m}$$

$$\Rightarrow v = \frac{300}{10} = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Παράδειγμα 2: Τώρα εάν στο προηγούμενο ερώτημα, το αυτοκίνητο κινείται από το σημείο Α στο σημείο Ο (σημείο αναφοράς) σε 10 s, και από το σημείο Ο στο σημείο Β σε 20 s, να βρείτε η μέση ταχύτητα κατά μήκος της ευθείας ΑΒ.

Λύση

Έστω ότι ονομάζουμε την χρονική διάρκεια που κινείται από το σημείο Α στο σημείο Ο ως Δt_1 , και την χρονική διάρκεια που κινείται από το σημείο Ο στο σημείο Β ως Δt_2 . Η συνολική χρονική διάρκεια για την κίνηση από Α στο Β είναι:

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = 10 + 20 = 30s$$

$$\text{Τώρα } v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{300}{30} = 10 \frac{m}{s}$$

Η έννοια της στιγμιαίας ταχύτητας

Η στιγμιαία ταχύτητα ενός σώματος την χρονική στιγμή t_1 , ισούται με το όριο της μέσης ταχύτητας σε μια πολύ μικρό χρονικό διάστημα γύρω από την χρονική στιγμή t_1 . Το χρονικό διάστημα είναι $\Delta t = t_2 - t_1$. Έστω ότι η μέση ταχύτητα σε αυτό το χρονικό διάστημα είναι $\bar{v}$.

$$\bar{v} = \frac{x_{t_2} - x_{t_1}}{t_2 - t_1} = \frac{x_{(t_1 + \Delta t)} - x_{t_1}}{\Delta t}$$

$$v_{t_1} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Η μονάδα μέτρησης της ταχύτητας σε SI είναι $\frac{m}{s}$

Η στιγμιαία ταχύτητα λέγεται απλά ταχύτητα κάποιες φορές, αλλά η μέση ταχύτητα πάντα λέγεται «μέση ταχύτητα».

Η ταχύτητα είναι ένα διανυσματικό μέγεθος, η οποία μπορεί να παίρνει μια **αλγεβρική τιμή** όταν η κίνηση μελετάται σε μια διάσταση.

Η έννοια της επιτάχυνσης

Η επιτάχυνση είναι ένα διάνυσμα που εκφράζει τον **ρυθμό μεταβολής** του μέτρου και της κατεύθυνσης **της ταχύτητας**.

Η μέση επιτάχυνση υπολογίζεται ως $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$

Η στιγμιαία επιτάχυνση είναι η επιτάχυνση ενός σώματος σε μια πολύ μικρή στιγμή. Δηλαδή $a_i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$

Η μονάδα μέτρησης του είναι $\frac{m}{s^2}$

Ασκήσεις για εξάσκηση

1. Ένα αυτοκίνητο κινείται σε μία ευθεία γραμμή. Για τη μισή διαδρομή κινείται με σταθερή ταχύτητα $40 \frac{m}{s}$, ενώ διανύει την άλλη μισή διαδρομή με σταθερή ταχύτητα $60 \frac{m}{s}$. Να βρείτε την μέση ταχύτητα του αυτοκινήτου για όλη τη διαδρομή.
2. Ένας κολυμβητής ξεκινά να κολυμπάει από την μια άκρη της πισίνας με σταθερή ταχύτητα μέτρου 5 m/s και όταν φτάνει στην άλλη άκρη, επιστρέφει με σταθερή ταχύτητα μέτρου 2 m/s . Να βρείτε την μέση ταχύτητα του κολυμβητή στα 14 πρώτα δευτερόλεπτα της κίνησης του εάν το μήκος της πισίνας είναι 50 μέτρα.

Λύσεις

1.

Έστω ότι το αυτοκίνητο κινείται με ταχύτητα v_1 για τη μισή διαδρομή και ταχύτητα v_2 για την άλλη μισή διαδρομή. Έχουμε

$$v_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{\Delta x_1}{v_1} = \frac{\frac{\Delta x}{2}}{v_1} = \frac{\Delta x}{2v_1}$$

$$v_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta t_2} \Rightarrow \Delta t_2 = \frac{\Delta x_2}{v_2} = \frac{\frac{\Delta x}{2}}{v_2} = \frac{\Delta x}{2v_2}$$

$$\Rightarrow \bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t_1 + \Delta t_2} = \frac{\Delta x}{\frac{\Delta x}{2v_1} + \frac{\Delta x}{2v_2}} = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2}$$

$$\Rightarrow \bar{v} = \frac{2 \times 40 \times 60}{40 + 60} = 48 \frac{m}{s}$$

2.

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta x}{v}$$

Ο κολυμβητής φτάνει στη μια άκρη της πισίνας σε $t_1 = \frac{50}{5} = 10s$

Ομοίως επιστρέφει στην αρχική του θέση σε

$$t_2 = \frac{50}{2} = 25s$$

Άρα τη χρονική στιγμή $t = 14s$, κολυμβητής είναι στην πορεία επιστροφής για 4 δευτερόλεπτα. Δηλαδή επιστρέφει κατά $4s \times \frac{2m}{s} = 8m$. Άρα

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{50 - 8}{14} = 3 \frac{m}{s}$$

Πως μετατρέπεται η κίνηση σε μαθηματικά;

Έστω ότι ένα σώμα κινείται σε ευθεία γραμμή και έχει σταθερή επιτάχυνση a (μπορεί η a να είναι 0). Επίσης έστω ότι μετρούμε το χρόνο από την στιγμή που είναι στην θέση $x=0$. Από βασικές έννοιες έχουμε

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow a = \frac{v - v_0}{t} \Rightarrow v = v_0 + at$$

(Εξίσωση ταχύτητας - χρόνου)

Επίσης:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

(Εξίσωση θέσης-χρόνου)

Δηλαδή

$$\Delta x = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

Και από βασικές έννοιες $a = \frac{v - v_0}{t}$

$$\Rightarrow \Delta x = v_0 t + \frac{1}{2} \left(\frac{v - v_0}{t} \right) t^2$$

$$\Rightarrow \Delta x = \left(\frac{v + v_0}{2} \right) t$$

(Εξίσωση μετατόπισης-ταχύτητας)

Συνδυάζοντας το παραπάνω μαζί με την σχέση $t = \frac{v - v_0}{a}$

$$\Delta x = \left(\frac{v - v_0}{a} \right) \left(\frac{v + v_0}{2} \right)$$

$$\text{Δηλαδή } \Delta x = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$$

(Εξίσωση μετατόπισης - ταχύτητας χωρίς το χρόνο)

Όταν το σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα v σημαίνει ότι $a = 0$, δηλαδή η πρώτη εξίσωση γράφεται $x = x_0 + vt$

Παράδειγμα 1: Ένα αυτοκίνητο κινείται με σταθερή ταχύτητα 10 m/s και ο οδηγός βλέπει 30m μπροστά του τα φώτα τροχαίας. Έτσι φρενάρει και ξεκινά να επιβραδύνεται με σταθερή επιβράδυνση 2 m/s^2 . Να προσδιορίσετε:

A) Μετά από πόσα δευτερόλεπτα το αυτοκίνητο σταματάει

B) Εάν το αυτοκίνητο θα σταματήσει πριν να φτάσει στα φώτα τροχαίας.

Λύση

A)

Αφού το αυτοκίνητο επιβραδύνεται, η επιτάχυνση του είναι $-2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Για να βρούμε το χρόνο που χρειάζεται για να σταματήσει, θέτουμε $v = 0$ στην εξίσωση $v = v_0 + at$

$$\Rightarrow 0 = 10 - 2t \Rightarrow t = 5\text{s}$$

B)

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση $\Delta x = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$, θα εξετάσουμε πόσο θα μετατοπιστεί το αυτοκίνητο πριν να σταματήσει.

$$\Delta x = 10 \times 5 + \frac{1}{2}(-2)(5)^2 = 25 \text{ m}$$

Δηλαδή από την στιγμή που ο οδηγός φρενάρει και το αυτοκίνητο σταματάει, το αυτοκίνητο έχει μετατοπισθεί κατά 25 μέτρα. Όμως τη στιγμή που ο οδηγός πάτησε τα φρένα, τα φώτα τροχαίας ήταν 30 μέτρα μπροστά του, δηλαδή το αυτοκίνητο σταμάτησε πριν να φτάσει στα φώτα τροχαίας.

Παράδειγμα 2: Δυο αυτοκίνητα A και B κινούνται σε ένα ευθύγραμμο δρόμο. Τα αυτοκίνητα A και B κινούνται με σταθερή

ταχύτητα 72 km/h και 108 km/h αντίστοιχα. Το αυτοκίνητο A βλέπει το αυτοκίνητο B 200m μπροστά του και ξεκινά να κινείται με σταθερή επιτάχυνση $2 \frac{m}{s^2}$. Το αυτοκίνητο B συνεχίζει να κινείται με σταθερή ταχύτητα. Να βρεθεί μετά από πόσα δευτερόλεπτα τα αυτοκίνητα θα συναντηθούν.

Λύση: Μετατρέπουμε τα μεγέθη σε SI.

$$72 \frac{km}{h} = 72 \frac{km}{h} \times \frac{1h}{3600s} \times \frac{1000m}{1km} = 20 \frac{m}{s}$$

$$108 \frac{km}{h} = 108 \frac{km}{h} \times \frac{1h}{3600s} \times \frac{1000m}{1km} = 30 \frac{m}{s}$$

Από τις εξισώσεις κίνησης έχουμε:

$$x_A = x_{0A} + v_{0A}t + \frac{1}{2}a_At^2 = 20t + t^2$$

$$x_B = x_{0B} + v_{0B}t = 200 + 30t$$

Όταν τα αυτοκίνητα συγκρούονται, θα είναι στις ίδιες θέσεις, δηλαδή πρέπει να έχουμε $x_A = x_B$

$$20t + t^2 = 200 + 30t \Rightarrow t^2 - 10t - 200 = 0$$

$$\Rightarrow (t - 20)(t + 10) = 0$$

Και αφού ο χρόνος είναι πάντα θετικός, έχουμε $t = 20 s$

Ασκήσεις για εξάσκηση

1. Δυο αυτοκίνητα κινούνται το ένα προς το άλλο από ηρεμία με σταθερή επιτάχυνση $1\frac{m}{s^2}$. Εάν τα αυτοκίνητα συγκρούονται μετά από 8 δευτερόλεπτα, να βρεθεί η αρχική απόσταση μεταξύ τους.
2. Ένα ποδήλατο κινείται με σταθερή επιτάχυνση. Τη χρονική στιγμή $t = 0$, βρίσκεται στην θέση $x_1 = 2m$ και έχει ταχύτητα $10\frac{m}{s}$. Εάν στην θέση $x_2 = 10m$, η ταχύτητα του είναι $6\frac{m}{s}$, να γράψετε την εξίσωση ταχύτητας- χρόνου για το ποδήλατο.

Λύσεις

1.

Τα αυτοκίνητα κινούνται προς αντίθετες κατευθύνσεις, δηλαδή ένα από τα αυτοκίνητα έχει επιτάχυνση $1 \frac{m}{s^2}$ και το άλλο έχει επιτάχυνση $-1 \frac{m}{s^2}$. Θεωρούμε ότι το αυτοκίνητο με επιτάχυνση $1 \frac{m}{s^2}$ είναι στο σημείο αναφοράς. Όταν τα αυτοκίνητα συγκρούονται, θα είναι στις ίδιες θέσεις, δηλαδή πρέπει να έχουμε $x_A = x_B$

$$\Rightarrow v_{0A}t + \frac{1}{2}a_A t^2 = x_0 + v_{0B}t + \frac{1}{2}a_B t^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}t^2 = x_0 - \frac{1}{2}t^2$$

$$\Rightarrow x_0 = t^2$$

Αφού συγκρούονται μετά από 8 δευτερόλεπτα $x_0 = 8^2 = 64m$

Άρα η αρχική απόσταση μεταξύ των αυτοκινήτων ήταν 64 μέτρα.

2.

Για να γράψουμε την εξίσωση ταχύτητας-χρόνου πρέπει να γνωρίζουμε την επιτάχυνση και την αρχική ταχύτητα του ποδηλάτου.

Η αρχική ταχύτητα είναι $v_0 = 10 \frac{m}{s}$.

Για να υπολογίσουμε την επιτάχυνση εργαζόμαστε ως εξής:

$$\Delta x = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} \Rightarrow a = \frac{v^2 - v_0^2}{2\Delta x} \Rightarrow a = \frac{6^2 - 10^2}{2 \times (10 - 2)}$$

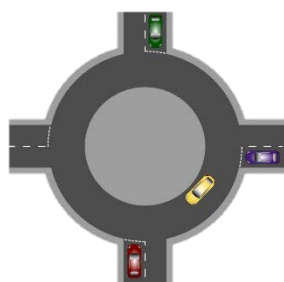
$$\Rightarrow a = -4 \frac{m}{s^2}$$

$$\Rightarrow v = v_0 + at$$

$$\Rightarrow \boxed{v = 10 - 4t}$$

Η κίνηση σε 2 διαστάσεις

Μέχρι τώρα μελετήσαμε κινήσεις που γίνονται σε μια ευθεία γραμμή σε 1 διάσταση. Αλλά στην πραγματικότητα, οι παραπάνω κινήσεις γίνονται σε 2 διαστάσεις (π.χ. σε μια καμπυλόγραμμη διαδρομή, ή σε μια κυκλική διαδρομή) ή σε 3 διαστάσεις. Θα μελετούμε η κίνηση σε 2 διαστάσεις (στο επίπεδο) σε αυτή την ενότητα.



Η θέση στο επίπεδο

Στην κίνηση στο επίπεδο, για να καθορίζουμε τη θέση ενός σώματος χρησιμοποιούμε το ορθοκανονικό σύστημα αξόνων. Το διάνυσμα θέσης είναι το διάνυσμα που ενώνει την αρχή των αξόνων με το σώμα και συμβολίζεται με $\vec{r}$

Αναλύουμε τη θέση $\vec{r}$ σε δύο συνιστώσες με αλγεβρική τιμή r_x και r_y πάνω στις άξονες x και y αντίστοιχα

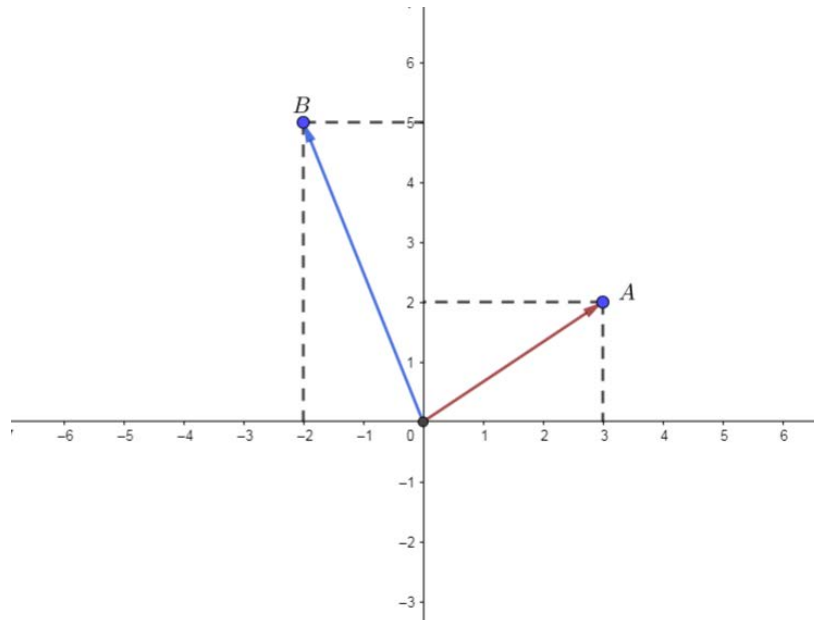
Έτσι η θέση μπορεί να γραφτεί σαν $\vec{r} = r_x \vec{i} + r_y \vec{j}$ όπου $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ και $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ και η απόσταση του από το σημείο αναφοράς είναι

$$\sqrt{r_x^2 + r_y^2}$$

Στα μαθηματικά λέμε ότι η θέση του σώματος έχει συντεταγμένες $(x, y) = (r_x, r_y)$

Σημείωση: Εάν οι εξισώσεις κίνησης ενός σώματος στους άξονες x και y είναι $x = f(t)$ και $y = g(t)$ αντίστοιχα, τότε η θέση του σώματος δίνεται από την σχέση $\vec{r} = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j}$

Για παράδειγμα στο παρακάτω σχήμα η θέση του σώματος A είναι: $r_A = 3i + 2j$ και η θέση του σώματος B είναι: $r_B = -2i + 5j$



Η μετατόπιση του σώματος στο επίπεδο είναι η διανυσματική διαφορά της τελικής και αρχικής θέσης. Δηλαδή

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

Η μετατόπιση μπορεί να γραφτεί σαν $\Delta \vec{r} = \Delta x \cdot i + \Delta y \cdot j$ όπου Δx και Δy είναι οι μετατοπίσεις στις άξονες x και y αντίστοιχα. Το μέτρο της μετατόπισης είναι

$$|\Delta \vec{r}| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

Η μέση διανυσματική ταχύτητα η απλά «μέση ταχύτητα» ορίζεται ως

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

Η μέση ταχύτητα μπορεί να γραφτεί σαν $\vec{v} = v_x \cdot i + v_y \cdot j$ όπου v_x και v_y είναι οι συνιστώσες της μέσης ταχύτητας στις άξονες x και y αντίστοιχα και το μέτρο της μέσης ταχύτητας είναι

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Η στιγμιαία ταχύτητα όπως και στις κινήσεις στην ευθεία γραμμή ορίζεται ως $\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ και η διεύθυνση του διανύσματος είναι εφαπτομένη στην τροχιά κίνησης ενός σώματος.

Η μέση αριθμητική ταχύτητα η οποία δεν είναι διανυσματικό, αλλά **μονόμετρο μέγεθος** ορίζεται ως $u = \frac{s}{\Delta t}$, όπου u είναι η μέση αριθμητική ταχύτητα και s είναι η **διανυόμενη απόσταση**

Η μέση επιτάχυνση

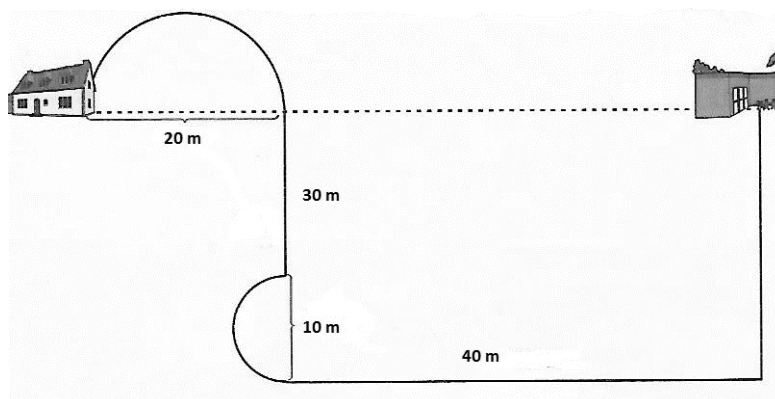
Η μέση επιτάχυνση ορίζεται ως $\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$. Η μέση επιτάχυνση μπορεί να γραφτεί σαν $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j}$ όπου a_x και a_y είναι οι συνιστώσες της μέσης επιτάχυνσης στις άξονες x και y αντίστοιχα και το μέτρο της μέσης επιτάχυνσης είναι

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

Η εξίσωση της τροχιάς

Γενικά μπορούμε να μελετήσουμε τη σχέση μεταξύ των θέσεων ενός σώματος στους άξονες x και y κατά τη διάρκεια της κίνησης χρησιμοποιώντας την εξίσωση της τροχιάς. Η εξίσωση της τροχιάς δεν περιλαμβάνει τον χρόνο και μπορεί να δείχνει την μορφή της τροχιάς.

Παράδειγμα 1: Ο Δημήτρης έχει διανύσει την παρακάτω διαδρομή σε 20 λεπτά με το ποδήλατο του. Να βρείτε το μέτρο της μέσης αριθμητικής και της μέσης διανυσματικής ταχύτητα του ποδηλάτου.



Λύση

Η διανυόμενη απόσταση είναι:

$$10\pi + 30 + 5\pi + 40 = 117,1 \text{ m}$$

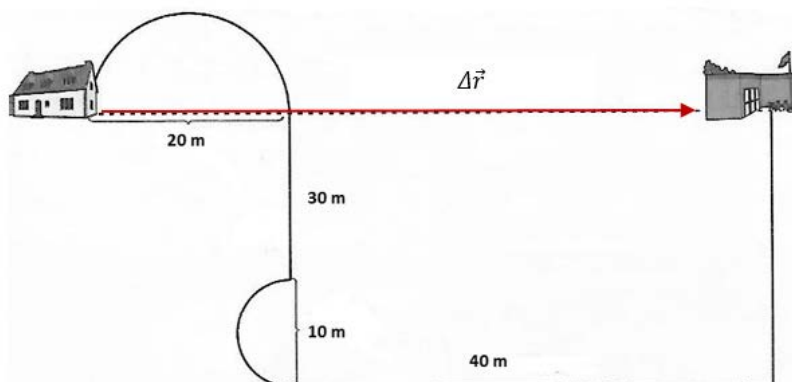
Άρα η μέση αριθμητική ταχύτητα είναι:

$$u = \frac{s}{\Delta t} = \frac{117,1 \text{ m}}{20 \text{ min}} = \frac{117,1 \text{ m}}{20 \text{ min} \times \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}}} = 0,098 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Όμως για να βρούμε την μέση διανυσματική ταχύτητα (μέση ταχύτητα), πρέπει να βρούμε το μέτρο της μετατόπισης. Το μέτρο της μετατόπισης όπως φαίνεται από το σχήμα είναι:

$$|\Delta r| = 60 \text{ m}$$

$$\text{Άρα } v = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{60 \text{ m}}{20 \text{ min} \times \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}}} = 0,05 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



Παράδειγμα 2: Ένα σωματίδιο κινείται στο επίπεδο με εξισώσεις

κίνησης $\begin{cases} x = 4t - 1 \\ y = t^2 \end{cases}$ στο S.I. Να βρείτε:

A) Τη μέση ταχύτητα του σωματιδίου στο χρονικό διάστημα 1s έως 3s.

B) Την εξίσωση της τροχιάς.

Λύση

A) Το διάνυσμα θέσης του σωματιδίου είναι

$$\vec{r} = (4t - 1)i + (t^2)j$$

Άρα όταν $t = 1s$, έχουμε $\vec{r}_1 = (4 \times 1 - 1)i + (1^2)j$

$$\Rightarrow \vec{r}_1 = 3i + j$$

όταν $t = 3s$, έχουμε $\vec{r}_2 = (4 \times 3 - 1)i + (3^2)j$

$$\Rightarrow \vec{r}_2 = 11i + 9j$$

Δηλαδή η μετατόπιση του σώματος στο χρονικό διάστημα είναι:

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = 11i + 9j - (3i + j) = 8i + 8j$$

Άρα

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{8i + 8j}{2} = 4i + 4j$$

B)

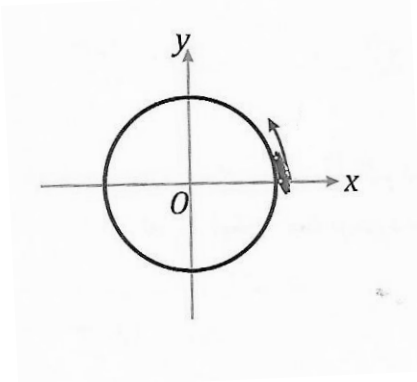
Προσπαθούμε να συνδέσουμε τις εξισώσεις κίνησης για να σχηματίσουμε μια καινούργια εξίσωση χωρίς τον χρόνο. Για αυτό λύνουμε την εξίσωση $x = 4t - 1$ ως προς t .

$$x = 4t - 1 \Rightarrow t = \frac{x + 1}{4}$$

$$y = t^2 \Rightarrow \boxed{y = \left(\frac{x + 1}{4}\right)^2}$$

Ασκήσεις για εξάσκηση

1. Ένα αυτοκίνητο κινείται στον παρακάτω κυκλικό κόμβο ακτίνας 80 m με σταθερή αριθμητική ταχύτητα 3,14 m/s. Να βρείτε τη μέση διανυσματική ταχύτητα του σώματος στο χρονικό διάστημα 0 ως 80s. Υποθέτουμε ότι $\pi=3,14$



2. Δυο μπάλες κινούνται πάνω στον επίπεδο xOy και οι θέσεις τους στο SI ορίζονται ως:

$$\begin{cases} x_A = 8t - 6 \\ y_A = 3t \end{cases}, \quad \begin{cases} x_B = 18 \\ y_B = 9 \end{cases}$$

Να βρείτε η απόσταση μεταξύ των μπάλων 1 δευτερόλεπτο πριν από τη σύγκρουση τους.

3. Η εξίσωση κίνησης ενός σώματος στο επίπεδο είναι: $\vec{r} = (3t)i + (9t^2 - 6t + 1)j$. Να βρείτε την εξίσωση της τροχιάς.

Λύσεις

1.

Έχουμε

$$u = \frac{s}{\Delta t} \Rightarrow s = u\Delta t = 3,14 \times 80 = \pi R$$

Με άλλα λόγια το αυτοκίνητο διανύει τη μισή περιφέρεια του κύκλου. Άρα το μέτρο της μετατόπισης ισούται με τη διάμετρο του κύκλου.

$$\Rightarrow \Delta r = 160m$$

$$\Rightarrow v = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{160m}{80s} = 2 \frac{m}{s}$$

2.

Όταν οι μπάλες συγκρουστούν οι συνιστώσες των θέσεων τους είναι ίσες. Δηλαδή $8t - 6 = 18 \Rightarrow t = 3$,

Έχουμε πως $r_A = (8t - 6)i + (3t)j$ και $r_B = 18i + 9j$.

Τώρα θα υπολογίσουμε τις θέσεις των μπάλων τη χρονική στιγμή $t = 3s - 1s = 2s$. Έχουμε:

$$r_A = (8 \times 2 - 6)i + (3 \times 2)j = 10i + 6j \text{ και } r_B = 18i + 9j$$

Άρα η απόσταση AB είναι:

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \\ &= \sqrt{(18 - 10)^2 + (9 - 6)^2} = \sqrt{73} \text{ m} \end{aligned}$$

3.

$$x = 3t \Rightarrow t = \frac{x}{3}$$

$$y = 9t^2 - 6t + 1 \Rightarrow y = 9\left(\frac{x}{3}\right)^2 - 6\left(\frac{x}{3}\right) + 1$$

$$\Rightarrow \boxed{y = x^2 - 2x + 1}$$

Κίνηση υπό την επίδραση του βάρους- Η ελεύθερη πτώση

Κατακόρυφες Βολές

Στην Νευτώνεια μηχανική, η ελεύθερη πτώση είναι οποιαδήποτε κίνηση ενός σώματος, όπου το βάρος είναι η μόνη δύναμη που ασκείται επάνω σε αυτό. Σε μια πτώση, όταν η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα, όλα τα σώματα θα πέσουν με την ίδια επιτάχυνση που ονομάζεται επιτάχυνση της βαρύτητας και συμβολίζεται με g .

Η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι πάντοτε προς την κατακόρυφη κατεύθυνση με φορά προς το κέντρο της γης, και έχει μέτρο ίσο με $9,81 \frac{m}{s^2}$. Όμως σε αυτό το βιβλίο υποθέτουμε $g = 10 \frac{m}{s^2}$

Στην ελεύθερη πτώση, η επιτάχυνση της κίνησης ενός σώματος είναι σταθερή, έτσι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις κίνησης με σταθερή επιτάχυνση.

Υποθέτουμε ότι η θετική φορά του άξονα y είναι προς τα κάτω και ότι το σημείο αναφοράς του άξονα είναι το σημείο βολής. Έτσι στις εξισώσεις κίνησης με σταθερή επιτάχυνση θέτουμε g στην θέση της επιτάχυνσης a

Με άλλα λόγια:

$$v = gt + v_0$$

$$y = \frac{1}{2} gt^2 + v_0 t$$

$$\Delta y = \left(\frac{v_1 + v_2}{2} \right) t$$

$$v^2 - v_0^2 = 2g\Delta y$$

Προσοχή 1: Το y στην εξίσωση δεν είναι η απόσταση του σώματος από το έδαφος αλλά από το σημείο αναφοράς. Δηλαδή εάν το σώμα βρίσκεται σε απόσταση h μέτρα από το έδαφος μια χρονική στιγμή και το αρχικό ύψος βολής ήταν H , τότε αυτή τη χρονική στιγμή $y = H - h$

Παράδειγμα 1: Ένα σώμα αφήνεται από ύψος 20 μέτρων από το έδαφος. Να βρείτε την ταχύτητα του σώματος όταν φτάνει στο έδαφος. ($g = 10$)

Λύση:

Η μετατόπιση όταν το σώμα φτάνει στο έδαφος είναι

$$\Delta y = 20m - 0 = 20m$$

Άρα

$$v^2 - v_0^2 = 2g\Delta y \Rightarrow v^2 - 0^2 = 2 \times 10 \times 20 \Rightarrow v^2 = 400 \Rightarrow v = 20 \frac{m}{s}$$

Παράδειγμα 2: Ένα σώμα βάλλεται κατακόρυφα προς τα κάτω από ύψος 20 μέτρων από το έδαφος. Μετά από 2 δευτερόλεπτα, το σώμα βρίσκεται σε ύψος 5 μέτρων από το έδαφος. Να υπολογίσετε την ταχύτητα του σώματος σε αυτή τη χρονική στιγμή (2 δευτερόλεπτα μετά από την βολή)

Λύση

$$\text{Έχουμε: } y = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t$$

Όμως αφού η αρχική ταχύτητα της βολής είναι άγνωστη στην εκφώνηση (αφού το σώμα βάλλεται η αρχική ταχύτητα δεν είναι μηδέν), θα χρησιμοποιούμε τον τύπο: $v = gt + v_0 \Rightarrow v_0 = v - gt$ και το συνδυάζουμε με τον αρχικό τύπο. Έτσι έχουμε:

$$y = \frac{1}{2}gt^2 + (v - gt)t$$

$$\Rightarrow y = vt - gt^2 + \frac{1}{2}gt^2$$

$$\Rightarrow \boxed{y = -\frac{1}{2}gt^2 + vt}$$

$$\Rightarrow 20 - 5 = -\frac{1}{2} \times 10 \times 2^2 + v \times 2 \text{ (βλέπετε προσοχή 1)}$$

$$\Rightarrow 15 = -20 + 2v$$

$$\Rightarrow v = 17.5 \frac{m}{s}$$

Τώρα θα μελετήσουμε την περίπτωση όπου ένα σώμα βάλλεται κατακόρυφα προς τα πάνω. Σε αυτή την περίπτωση επίσης έχουμε κίνηση με σταθερή επιτάχυνση, αλλά είναι καλύτερα να θέτουμε την θετική φορά του άξονα ψ προς τα πάνω και όπως προηγουμένως το σημείο αναφοράς το σημείο βολής. Έτσι κάθε διάνυσμα που έχει φορά προς τα πάνω παίρνει θετική τιμή και κάθε διάνυσμα που είναι προς τα κάτω παίρνει αρνητική τιμή. Όπως προηγουμένως, η επιτάχυνση είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας αλλά αφού η φορά της επιτάχυνσης είναι προς τα κάτω (προς το κέντρο της γης), στις εξισώσεις θέτουμε $-g$ αντί για g .

Άρα:

$$v = -gt + v_0$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t$$

$$\Delta y = \left(\frac{v + v_0}{2}\right)t$$

$$v^2 - v_0^2 = -2g\Delta y$$

Παράδειγμα 3: Μία σφαίρα βάλλεται κατακόρυφα προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα 35 m/s και από ύψος 45 μέτρων από το έδαφος. Να βρείτε μετά από πόσα δευτερόλεπτα η σφαίρα θα φτάσει στο έδαφος.

Λύση:

Η θέση του εδάφους είναι -40 μέτρα (γιατί βρίσκεται 40 μέτρα κάτω από το σημείο βολής).

Άρα εάν στην εξίσωση $y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t$, θέτουμε $y = -40m$, θα βρούμε τότε η σφαίρα θα φτάσει στο έδαφος (με άλλα λόγια υπολογίζουμε τον χρόνο πτήσης της σφαίρας)

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t$$

$$\Rightarrow -40 = -5t^2 + 35t$$

$$\Rightarrow t^2 - 7t - 5 = 0$$

$$\Rightarrow t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \times (-5) \times 1}}{2 \times 1}$$

$$\Rightarrow t = -0,7 \text{ s που απαγορεύεται ή } t = 7,7 \text{ s}$$

$$\text{Άρα } t = 7,7 \text{ s}$$

Παράδειγμα 4: Ένα σφαιρίδιο βάλλεται κατακόρυφα προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα 30m/s από το έδαφος. Να βρείτε το μέγιστο ύψος στο οποίο φτάνει κατά την πτήση του.

Λύση

Όταν το σφαιρίδιο φτάνει στο μέγιστο του ύψος, η ταχύτητα του μηδενίζεται. Άρα στην εξίσωση $v^2 - v_0^2 = -2g\Delta y$ θέτουμε $v = 0$ και $\Delta y = y_{max}$

$$\Rightarrow -v_0^2 = -2gy_{max} \Rightarrow y_{max} = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{30^2}{2 \times 10} = 45 \text{ m}$$

Ασκήσεις για εξάσκηση

1. Μία σφαίρα αφήνεται ελεύθερα από ύψος h και στα τελευταία 2 δευτερόλεπτα της κίνησης του διανύει απόσταση $\frac{3}{4}h$. Να βρείτε το ύψος h .
2. Μία μπάλα βάλλεται κατακόρυφα προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα 10m/s από ύψος 100 μέτρων από το έδαφος. Η μπάλα σε κάποια στιγμή χτυπά το έδαφος. Να βρείτε την δυανυόμενη απόσταση της μπάλας καθ' όλη την διάρκεια της πτήσης του.

Λύσεις Ασκήσεων

1. Έστω ότι η σφαίρα διανύει το αρχικό $\frac{1}{4}$ της διαδρομής της σε χρονικό διάστημα t_1 , και την υπόλοιπη διαδρομή σε χρονικό διάστημα $t_2 = 2s$. Εάν ο χρόνος πτήσης είναι t , τότε:

$$t = t_1 + t_2 = t_1 + 2$$

Αφού $y = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t$, έχουμε:

$$\begin{cases} h_1 = \frac{1}{2}gt_1^2 \\ h = \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{h_1}{h} = \left(\frac{t_1}{t}\right)^2 \Rightarrow \frac{\frac{1}{4}h}{h} = \left(\frac{t_1}{t_1+2}\right)^2 \xrightarrow{t_1>0} \frac{1}{2} = \frac{t_1}{t_1+2} \Rightarrow t_1 = 2s$$

$$\Rightarrow t = t_1 + t_2 = 2 + 2 = 4s$$

$$y = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t \Rightarrow h = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2} \times 10 \times 16 = 80m$$

2. Καταρχάς θα υπολογίζουμε το μέγιστο ύψος στον οποίο θα φθάσει η μπάλα

Όταν η μπάλα φτάνει στο μέγιστο της ύψος, η ταχύτητα της μηδενίζεται. Άρα στην εξίσωση $v^2 - v_0^2 = -2g\Delta y$ θέτουμε $v = 0$ και $\Delta y = y_{max}$

$$\Rightarrow -v_0^2 = -2gy_{max} \Rightarrow y_{max} = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{10^2}{2 \times 10} = 5m$$

Άρα το μέγιστο του ύψος είναι 5 μέτρα από το σημείο αναφοράς, που είναι το σημείο βολής. Δηλαδή το μέγιστο του ύψος είναι $100m + 5m = 105m$ από το έδαφος

Αρχικά η μπάλα ανεβαίνει 5 μέτρα πάνω. Στην συνέχεια σταματάει στιγμιαία. Μετά η ταχύτητα αλλάζει φορά και η μπάλα ξεκινά να

πέφτει από το μέγιστο του ύψος μέχρι να φτάσει στο έδαφος. Αφού το μέγιστό ύψος βρίσκεται 105 m πάνω από το έδαφος, στην διάρκεια που πέφτει από το μέγιστο ύψος θα διανύει 105 m .

Άρα η συνολική δυανυόμενη απόσταση είναι:

$$105\text{ m} + 5\text{ m} = 110\text{ m}$$

Οριζόντιες Βολές

Εάν βάλλουμε μια σφαίρα οριζόντια και η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα, η ταχύτητα του βλήματος παραμένει σταθερή κατά μήκος του άξονα x , ενώ πέφτει κάτω ταυτόχρονα υπό την επίδραση του βάρους στον άξονα y . Η σφαίρα κινείται σε καμπυλόγραμμη διαδρομή και για να μελετήσουμε την κίνηση της, εξετάζουμε την κίνηση της σφαίρας κατά μήκος του άξονα x και y **ξεχωριστά**.

Υποθέτουμε ότι το σημείο αναφοράς είναι το σημείο βολής και η θετική κατεύθυνση του άξονα y είναι προς τα πάνω. Θεωρούμε την θετική φορά του άξονα x ομόρροπη με την αρχική ταχύτητα.

Έτσι έχουμε $x = v_0 t$ όπου v_0 είναι η αρχική ταχύτητα (αφού η αρχική ταχύτητα είναι οριζόντια)

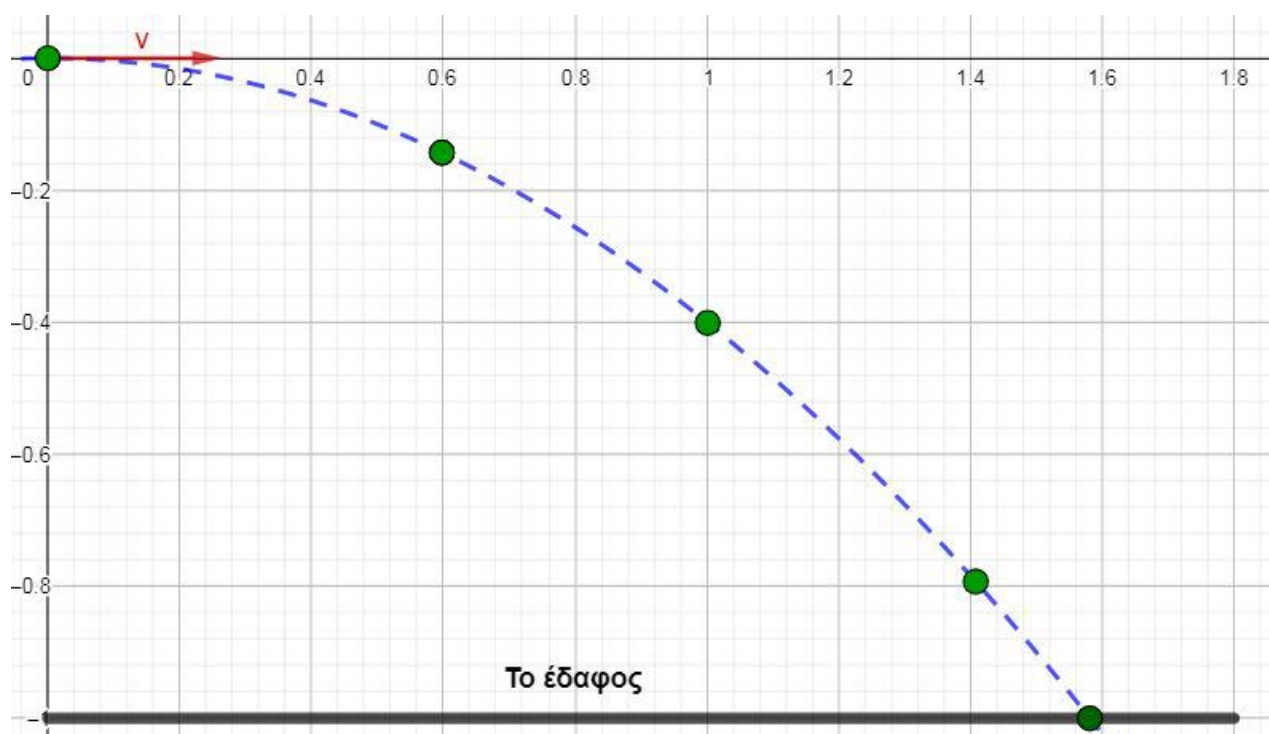
Η εικόνα της κίνησης κατά μήκος του άξονα y είναι μια κατακόρυφη βολή χωρίς αρχική ταχύτητα, και έτσι οι εξισώσεις κίνησης κατά μήκος του άξονα y είναι:

$$v_{0y} = 0$$

$$y = -\frac{1}{2} g t^2$$

$$v_y = -gt$$

$$v_{2y}^2 - v_{1y}^2 = -2g\Delta y$$



Όμως γενικά μπορούμε να μελετήσουμε τη σχέση μεταξύ των θέσεων της μπάλας στους άξονες x και y κατά τη διάρκεια της πτήσης χρησιμοποιώντας την εξίσωση της τροχιάς. Για να βρούμε αυτή την εξίσωση πρέπει να εξαλείψουμε το χρόνο από τις εξισώσεις: $x = v_0 t$ και $y = -\frac{1}{2} g t^2$, δηλαδή θέτουμε $t = \frac{x}{v_0}$ στην εξίσωση $y = -\frac{1}{2} g t^2$ και παίρνουμε $y = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0}\right)^2$

$$\Rightarrow \boxed{y = -\frac{g x^2}{2 v_0^2}}$$

Η πιο πάνω εξίσωση είναι εξίσωση παραβολής και αυτό εξηγεί γιατί η τροχιά που διανύει το σώμα σε μια οριζόντια βολή είναι καμπύλη.

Παράδειγμα 1: Βάλλουμε μια σφαίρα από ύψος 80m από το έδαφος με οριζόντια ταχύτητα 30 m/s. Εάν η αντίσταση αέρα είναι αμελητέα και $g = 10 \frac{m}{s^2}$, να βρεθεί:

- A) Ο χρόνος που απαιτείται για τη σφαίρα να φτάσει στη γη και τη μετατόπισή της στον άξονα x κατά τη διάρκεια αυτού του χρόνου.
- B) Η ταχύτητα της σφαίρας σε ύψος 60 μέτρων από το έδαφος
- Γ) Σε ποια χρονική στιγμή η ταχύτητα της σφαίρας είναι διπλάσιο της αρχικής της ταχύτητας.
- Δ) Οι συνιστώσες της ταχύτητας όταν η σφαίρα χτυπά τον έδαφος.
- Ε) Η ταχύτητα της σφαίρας κατά τη σύγκρουση με το έδαφος και η γωνία μεταξύ του διανύσματος ταχύτητας και του κατακόρυφου άξονα την ίδια στιγμή.
- ΣΤ) Ο χρόνος που απαιτείται για να φτάσει στη γη, αν η αρχική ταχύτητα του σφαίρα μειωθεί σε 15 m/s

Λύση

Α) Έστω ότι το σημείο βολής είναι η αρχή των αξόνων η θετική κατεύθυνση είναι προς τα πάνω. Έτσι, όταν η σφαίρα φτάνει στο έδαφος, η μετατόπισή της στον άξονα y είναι -80m . Δηλαδή:

$$y = -\frac{1}{2} g t^2$$

$$\Rightarrow -80 = -\frac{1}{2} \times 10 \times t^2$$

$$\Rightarrow t = 4\text{ s}$$

Σε διάστημα 4 δευτερολέπτων, η σφαίρα κινείται με ταχύτητα $30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ στον οριζόντιο άξονα. Έτσι $\Delta x = v_0 t = 30 \times 4 = 120\text{ m}$

Β) Σε ύψος 60 μέτρων από το έδαφος, η σφαίρα έχει πέσει 20 μέτρα στον κατακόρυφο άξονα. Αυτό σημαίνει ότι η θέση του στον άξονα y είναι $y = -20\text{ m}$.

Τώρα:

$$v_{2y}^2 - v_{1y}^2 = -2g\Delta y$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{900 - 20(-20)} = 10\sqrt{13} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Γ)

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Στο ερώτημα $v = 2v_0$, άρα

$$4v_0^2 = v_0^2 + v_y^2 \Rightarrow v_y = v_0\sqrt{3} = -30\sqrt{3}$$

$$\text{Τώρα } v_y = -gt \Rightarrow -30\sqrt{3} = -10t \Rightarrow t = 3\sqrt{3}\text{ s} = 5,2\text{ s}$$

Αφού $3\sqrt{3} > 4$, πριν από να φτάσει αυτή την ταχύτητα έχει ήδη χτυπήσει το έδαφος. Άρα η ταχύτητα της σφαίρας δεν είναι ποτέ διπλάσια από την αρχική της ταχύτητα.

Δ) Σε όλη τη διαδρομή, η συνιστώσα της ταχύτητας στον άξονα x είναι $v_x = v_0 = 30 \frac{m}{s}$, αλλά η συνιστώσα της ταχύτητας στον άξονα y είναι:

$$v_y = -gt = -40 \frac{m}{s}$$

$$\text{Ε) } |v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50 \frac{m}{s}$$

$$\text{και } \varepsilon\varphi\theta = \left| \frac{v_x}{v_y} \right| = \frac{3}{4} \Rightarrow \theta = 37^\circ$$

ΣΤ) Αν αλλάζουμε την αρχική ταχύτητα, ο χρόνος που χρειάζεται για να φτάσει η σφαίρα στο έδαφος (χρόνος πτήσης) είναι 4 δευτερόλεπτα.

Προσοχή 2: Σε μια οριζόντια βολή, η κίνηση του σώματος στον άξονα y εξαρτάται μόνο από το αρχικό ύψος και όχι από την αρχική ταχύτητα, άρα ο χρόνος πτήσης είναι ανεξάρτητος από την αρχική ταχύτητα.

Παράδειγμα 2: Στο παιχνίδι του Dart, στόχος του παίκτη είναι να χτυπάει ένα κόκκινο σημείο που βρίσκεται πάνω σε ένα κατακόρυφο τοίχο, το οποίο βρίσκεται σε οριζόντια απόσταση 2 μέτρα από το παίκτη. Ο παίκτης στοχεύει το σημείο ώστε το βελάκι να βρίσκεται ακριβώς στο ίδιο ύψος από το έδαφος με το σημείο, και το εκτοξεύει με οριζόντια ταχύτητα 20 m/s. Να βρείτε σε πόση απόσταση κάτω από το σημείο, το βελάκι θα χτυπάει τον τοίχο. Να δώσετε την απάντηση σε εκατοστόμετρα.

Λύση

Το σημείο αναφοράς είναι το σημείο βολής, δηλαδή το χέρι του παίκτη. Ξέρουμε ότι όταν χτυπά τον τοίχο η θέση στον άξονα x είναι 2 μέτρα. Η άσκηση μας ζητά την απόσταση κάτω από το σημείο, στο οποίο το βελάκι θα χτυπήσει τον τοίχο, δηλαδή αρκεί να βρούμε την θέση που θα έχει το βελάκι στον άξονα y όταν χτυπάει τον τοίχο. Άρα θα χρησιμοποιούμε την εξίσωση της τροχιάς.

Έχουμε:

$$y = -\frac{gx^2}{2v_0^2}$$

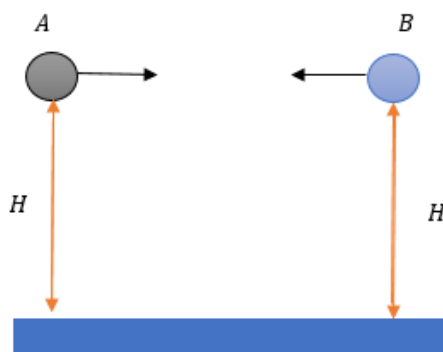
$$\Rightarrow y = -\frac{10 \times 2^2}{2 \times 20^2} = -0,05 \text{ m}$$

Άρα αφού ο το κόκκινο σημείο του τοίχου έχει μηδενική θέση στον άξονα y , και αφού η θετική κατεύθυνση είναι προς τα πάνω, το βελάκι θα χτυπά τον τοίχο 5 εκατοστόμετρα κάτω από το σημείο.



Ασκήσεις για εξάσκηση

1. Στο παρακάτω σχήμα βάλλουμε δύο σφαίρες οριζόντια προς την αντίθετη κατεύθυνση από τα σημεία (A) και (B) με αρχικές ταχύτητες $2 \frac{m}{s}$ και $4 \frac{m}{s}$ αντίστοιχα, από ύψος $H = 20m$ από το έδαφος. Εάν οι σφαίρες χτυπούν το έδαφος στο ίδιο σημείο, να βρείτε την απόσταση μεταξύ των σημείων (A) και (B). Να θεωρείται αμελητέες οι διαστάσεις των σφαιρών.



2. Βάλλουμε μια μπάλα του τένις με αρχική ταχύτητα $30 \frac{m}{s}$ κατακόρυφα προς τα πάνω ενώ ταυτόχρονα από το ίδιο ύψος βάλλουμε μια μπάλα μπάσκετ οριζόντια με αρχική ταχύτητα $2 \frac{m}{s}$. Ποια από αυτά θα φτάνει πρώτα στο έδαφος και γιατί;

Λύσεις

1. Πρώτα θα υπολογίσουμε τον χρόνο πτήσης για τις δύο σφαίρες.

$$\Delta y = \frac{1}{2} g t^2$$

$$\Rightarrow 20 = \frac{1}{2} \times 10 t^2 \Rightarrow t = 2 \text{ s}$$

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε την απόσταση AB:

$$AB = x_A + x_B = v_A t + v_B t \Rightarrow AB = 2 \times 2 + 4 \times 2 = 12 \text{ m}$$

2. Έστω ότι το σημείο αναφοράς για τις δυο μπάλες είναι το σημείο βολής και η θετική φορά του άξονα ψ είναι προς τα πάνω. Επίσης έστω ότι η μπάλα του τένις ονομάζεται σώμα A και η μπάλα μπάσκετ σώμα B.

Έχουμε:

$$\begin{cases} \Delta y_A = -\frac{1}{2} g t_A^2 + v_{0_A} t_A \\ \Delta y_B = -\frac{1}{2} g t_B^2 \end{cases}$$

Αφού όταν οι μπάλες φτάνουν στο έδαφος οι μετατοπίσεις τους είναι ίσες (είναι ίση με $-h$, όπου h είναι το αρχικό ύψος), έχουμε:

$$-\frac{1}{2} g t_A^2 + v_{0_A} t_A = -\frac{1}{2} g t_B^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} g (t_A^2 - t_B^2) = v_{0_A} t_A$$

Αφού v_{0_A} ήταν προς τα πάνω η τιμή του ήταν θετική. Επίσης ο χρόνος είναι πάντα θετικός. Οπότε: $v_{0_A} t_A > 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} g (t_A^2 - t_B^2) > 0$$

$$\Rightarrow t_A^2 > t_B^2$$

Διότι ο χρόνος είναι πάντα θετικός

$$\Rightarrow t_A > t_B$$

Άρα η μπάλα μπάσκετ θα φτάνει πρώτα στο έδαφος.

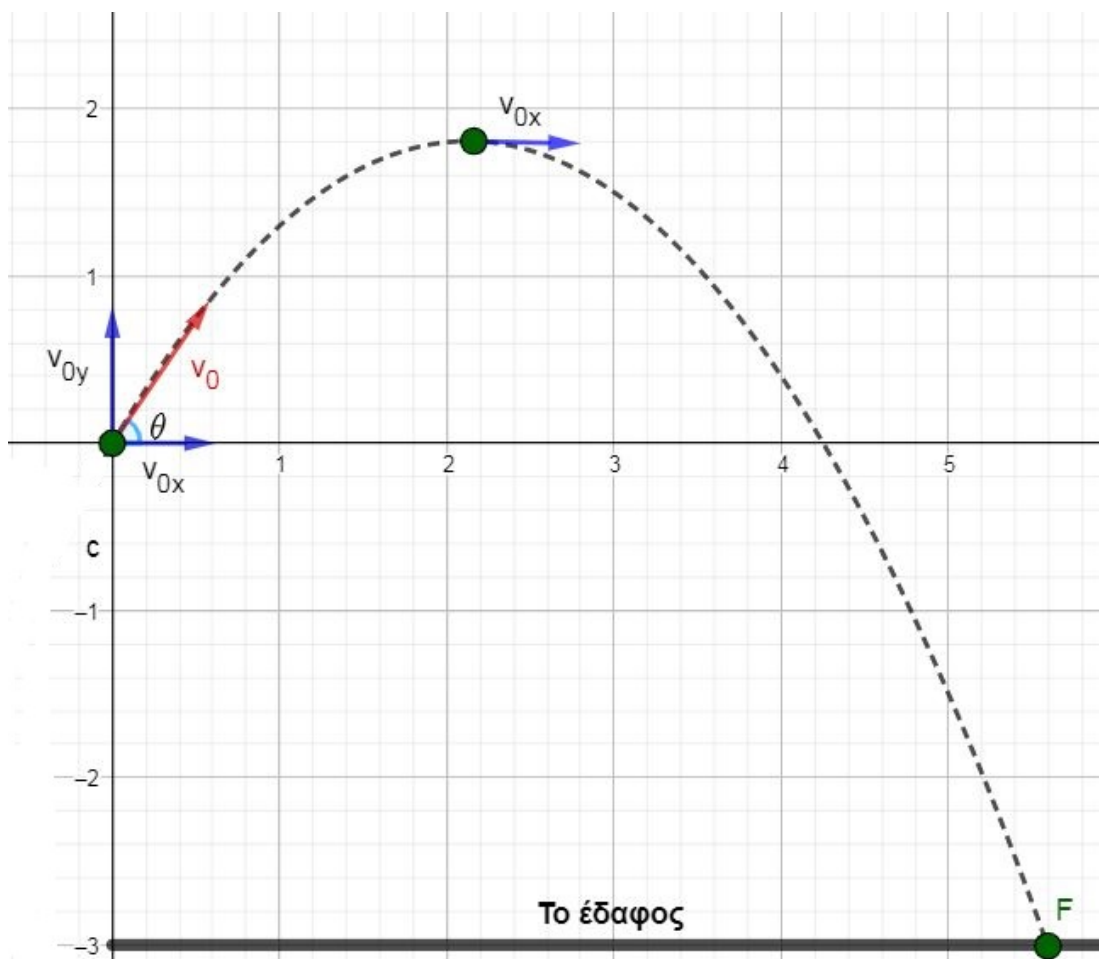
Πλάγιες Βολές

Εάν βάλλουμε ένα σώμα πλάγια με αρχική ταχύτητα v_0 που σχηματίζει γωνιά θ με τον οριζόντιο άξονα (άξονας x), τότε όπως και στην οριζόντια βολή, έχουμε μια καμπυλόγραμμη κίνηση. Δηλαδή για να μελετήσουμε την κίνηση του, εξετάζουμε την κίνηση του σώματος κατά μήκος του άξονα x και y **ξεχωριστά**.

Υποθέτουμε ότι το σημείο αναφοράς είναι το σημείο βολής και η θετική κατεύθυνση του άξονα y είναι προς τα πάνω. Η αρχική ταχύτητα, καθώς δεν ανήκει πάνω στους άξονες x και y , πρέπει να αναλυθεί σε δυο συνιστώσες v_{0x} και v_{0y} με αλγεβρικές τιμές:

$$v_{0x} = v_0 \cos \theta \text{ και } v_{0y} = v_0 \sin \theta$$

Η ταχύτητα του σώματος παραμένει σταθερή κατά μήκος του άξονα x , έτσι έχουμε: $v_x = v_{0x} = v_0 \cos \theta$ και $x = v_x t \Rightarrow \boxed{x = v_0 t \cos \theta}$



Όμως η προβολή της κίνησης του σώματος στον άξονα y , είναι μια κατακόρυφη βολή με αρχική ταχύτητα v_{0y} , δηλαδή οι εξισώσεις κίνησης κατά μήκος του άξονα y είναι:

$$v_y = -gt + v_{0y} = -gt + v_0 \sin \theta$$

$$y = -\frac{1}{2} gt^2 + v_{0y} t = -\frac{1}{2} gt^2 + v_0 \sin \theta$$

$$v_y^2 - v_0^2 = -2g\Delta y$$

Η ταχύτητα του σώματος σε κάθε χρονική στιγμή της κίνησης του δίνεται από την σχέση: $|v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

$$\text{Όμως είχαμε: } v_x = v_{0x} \text{ και } v_y^2 = v_{0y}^2 - 2gy$$

$$\text{Άρα } |v| = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2 - 2gy}$$

$$\Rightarrow |v| = \sqrt{v_0^2 - 2gy}$$

Παράδειγμα 1: Βάλλουμε μία μπάλα μπάσκετ από αρχικό ύψος 80m από το έδαφος και με αρχική ταχύτητα $50 \frac{m}{s}$ που σχηματίζει γωνιά 37° με την οριζόντια διεύθυνση. Να βρείτε:

A) Σε πόσα δευτερόλεπτα θα χτυπήσει στο έδαφος.

B) Την οριζόντια μετατόπιση Δx της μπάλας κατά τη διάρκεια της πτήσης.

Λύση: Αναλύουμε την αρχική ταχύτητα v_0 σε δύο συνιστώσες

$$v_{0x} = v_0 \cos \theta = 50 \times \cos 37 = 40 \frac{m}{s} \text{ και}$$

$$v_{0y} = v_0 \sin \theta = 50 \times \sin 37 = 30 \frac{m}{s}$$

Για να βρούμε τον χρόνο πτήσης, μελετούμε την κίνηση στον άξονα y . Όταν χτυπά στο έδαφος, αφού το σημείο αναφοράς ήταν το

σημείο βολής, και η θετική κατεύθυνση ήταν προς τα πάνω, η θέση της μπάλας είναι -80m . Άρα

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t \Rightarrow -80 = -5t^2 + 30t$$

$$\Rightarrow 5t^2 - 30t - 80 = 0$$

$$\Rightarrow t^2 - 6t - 16 = 0$$

$$\Rightarrow (t - 8)(t + 2) = 0$$

$$\xrightarrow{t > 0} t = 8\text{ s}$$

Β) Σε αυτή τη διάρκεια η ταχύτητα της μπάλας στον άξονα x είναι σταθερή και ίση με $40\frac{\text{m}}{\text{s}}$, άρα η μετατόπιση της μπάλας σε αυτή την διάρκεια δίνεται από:

$$\Delta x = u_x t = 40 \times 8 = 320\text{m}$$

Παράδειγμα 2: Μία σφαίρα βάλλεται **προς το έδαφος** από έναν πύργο ύψους 40m με γωνία 30° σε σχέση με τον οριζόντιο άξονα. Εάν $v_0 = 20\frac{\text{m}}{\text{s}}$, να υπολογίσετε τον χρόνο πτήσης της σφαίρας.

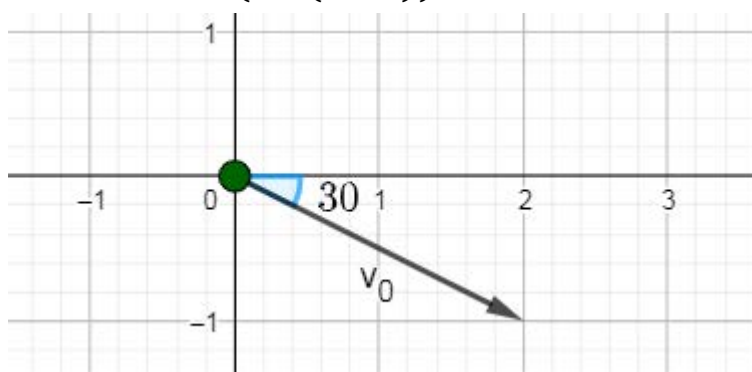
Λύση: Γράφουμε την εξίσωση κίνησης στον άξονα y .

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin\theta$$

Αφού η σφαίρα βάλλεται προς το έδαφος, η γωνιά θ βρίσκεται κάτω από τον άξονα x , δηλαδή $\theta = -30^\circ$

Άρα όπως στο προηγούμενο παράδειγμα θέτουμε $y = -40\text{m}$

$$-40 = -5t^2 + 20(\sin(-30))t \Rightarrow t^2 + 2t - 8 = 0 \Rightarrow \boxed{t = 2\text{ s}}$$



Η εξίσωση της τροχιάς

Όπως στην οριζόντια έτσι και στην πλάγια βολή, υπάρχει μια εξίσωση που συνδέει την θέση του βλήματος στον άξονα x με την θέση του στον άξονα y , η οποία λέγεται εξίσωση της τροχιάς. Για να βρούμε αυτή την εξίσωση πρέπει να εξαλείψουμε το χρόνο από τις εξισώσεις: $x = v_{0x} t$ και $y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_{0y} t$, δηλαδή θέτουμε $t = \frac{x}{v_{0x}}$ στην εξίσωση $y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_{0y} t$ και παίρνουμε:

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_{0x}} \right)^2 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}} x \\ \Rightarrow y &= -\frac{g x^2}{2 v_{0x}^2} + \frac{v_{0y}}{v_{0x}} x \\ \Rightarrow y &= -\frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \theta} + \frac{v_0 \sin \theta}{v_0 \cos \theta} x \\ \Rightarrow \boxed{y &= -\frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \theta} + x \tan \theta} \end{aligned}$$

Η πιο πάνω σχέση είναι εξίσωση παραβολής και αυτό εξηγεί γιατί η τροχιά που διανύει το σώμα σε μια πλάγια βολή είναι καμπύλη.

Παράδειγμα 3: Μια μπάλα του μπάσκετ βάλλεται από ύψος 2m πάνω από το έδαφος και με γωνία 45° ως προς τον οριζόντιο άξονα. Σκοπός είναι η μπάλα να μπει στο καλάθι. Η οριζόντια απόσταση μεταξύ του σημείου βολής και του καλαθιού είναι 11m και το ύψος του καλαθιού είναι 3m πάνω από το έδαφος. Εάν η μπάλα περνά μέσα από το καλάθι, να βρείτε την αρχική ταχύτητα της.

Λύση: Θα χρησιμοποιούμε την εξίσωση της τροχιάς.

$$y = -\frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \theta} + x \tan \theta$$

Στην εξίσωση θέτουμε $y = 3m - 2m = 1m$ (αφού το σημείο αναφοράς είναι το σημείο βολής που βρίσκεται 2 μέτρα πάνω από το έδαφος και το καλάθι βρίσκεται 3 μέτρα πάνω από το έδαφος), $x = 11\text{ m}$ και $\theta = 45^\circ$, και παίρνουμε:

$$1 = -\frac{10 \times 11^2}{2v_0^2 \times \frac{1}{2}} + 11 \times 1 \Rightarrow v_0 = 11 \frac{m}{s}$$

Μέγιστο ύψος βολής

Όταν ένα σώμα που εκτελεί πλάγια βολή, φτάνει στο μέγιστο ύψος της πτήσης του, η ταχύτητα του **δεν μηδενίζεται**. Όμως η **συνιστώσα της ταχύτητας στον άξονα y** μηδενίζεται. Σε αυτό το σημείο η ταχύτητα του βλήματος έχει την ελάχιστη της τιμή και είναι ίση με την συνιστώσα της ταχύτητας στον άξονα x.

Δηλαδή:

$$v_{min} = v_{\text{μεγιστό ύψος}} = v_{0x} = v_x = v_0 \cos \alpha$$

Για να υπολογίσουμε αυτό το ύψος H (από το σημείο βολής) θα χρησιμοποιούμε την εξίσωση $y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin \theta$. Για να υπολογίσουμε όμως το μέγιστο ύψος H από το σημείο βολής, πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε το χρόνο που χρειάζεται για να φτάσει στο ύψος αυτό. Για να υπολογίσουμε τον χρόνο, αφού ξέρουμε ότι η συνιστώσα της ταχύτητας στον άξονα y μηδενίζεται, θέτουμε $v_y = 0$ στην εξίσωση $v_y = -gt + v_0 \sin \theta$ και παίρνουμε

$$t = \frac{v_0 \sin \theta}{g}$$

Άρα:

$$H = -\frac{1}{2}g \left(\frac{v_0 \sin \theta}{g} \right)^2 + v_0 \times \frac{v_0 \sin \theta}{g} \times \sin \theta$$

$$\Rightarrow H = \frac{(v_0 \sin \theta)^2}{2g} = \frac{v_{0y}^2}{2g}$$

Παράδειγμα 4: Μία μπάλα καλαθόσφαιρας βάλλεται με αρχική ταχύτητα 20m/s και γωνιά α από το έδαφος σε ένα κλειστό δωμάτιο. Σε ύψος 5 μέτρα από το έδαφος, υπάρχει μια οριζόντια στέγη. Να βρείτε την μέγιστη τιμή του $\sin \alpha$ έτσι ώστε η μπάλα να μην συγκρούεται με την στέγη κατά την πτήση της.

Λύση:

Το μέγιστο ύψος του σώματος πρέπει να είναι μικρότερο ή ίσο με το 5m.

$$\frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \leq 5 \Rightarrow \sin^2 \alpha \leq \frac{10g}{v_0^2} = \frac{1}{4}$$

Αφού $0 < \alpha \leq 90^\circ$ έχουμε $\sin \alpha \geq 0$ και το μέγιστο ημίτονο γίνεται για την μέγιστη γωνιά.

$$\Rightarrow \sin \alpha \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \max(\sin \alpha) = \frac{1}{2}$$

Βεληνεκές πλάγιας βολής

Σε μια πλάγια βολή η οριζόντια μετατόπιση R του βλήματος από τη στιγμή βολής, μέχρι να ξανά φτάνει στο ίδιο ύψος (αρχικό ύψος) λέγεται το βεληνεκές της βολής.

Προφανώς αφού το σημείο βολής είναι το σημείο αναφοράς, για να βρούμε το βεληνεκές πρέπει να θέσουμε $y = 0$ και $x = R \neq 0$ στην εξίσωση της τροχιάς.

Δηλαδή

$$y = -\frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta} + x \tan \theta$$

$$\Rightarrow 0 = -\frac{gR^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta} + R \tan \theta$$

$$\Rightarrow \frac{gR^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta} = R \tan \theta$$

$$\xRightarrow{R \neq 0} \frac{gR}{2v_0^2 \cos^2 \theta} = \tan \theta$$

$$\Rightarrow R = \frac{2v_0^2 \cos^2 \theta \tan \theta}{g} = \frac{\frac{2v_0^2 \cos^2 \theta \sin \theta}{\cos \theta}}{g}$$

$$\Rightarrow R = \frac{2v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g} = \boxed{\frac{2v_{0x} v_{0y}}{g}}$$

Όμως από την τριγωνομετρική ταυτότητα $2\sin\theta\cos\theta = \sin(2\theta)$, το βεληνεκές μπορεί να γραφτεί και ως:

$$\boxed{R = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g}}$$

Σε μια βολή για να έχουμε το μέγιστο βεληνεκές πρέπει

$$\sin(2\theta) = 1, \text{ δηλαδή } 2\theta = 90^\circ \Rightarrow \theta = 45^\circ$$

Παράδειγμα 5: Ένας ποδοσφαιριστής βάζει μια μπάλα από το έδαφος με αρχική ταχύτητα v_0 και γωνιά ω μοιρών ως προς τον οριζόντιο άξονα. Στην συνέχεια το βάζει από το έδαφος με αρχική ταχύτητα ιδίου μέτρου άλλα με γωνιά $90 - \omega$ ως προς τον οριζόντιο άξονα. Να συγκρίνετε το βεληνεκές της μπάλας στις 2 περιπτώσεις.

Λύση:

$$R_1 = \frac{v_0^2 \sin(2\omega)}{g}$$

Όμως

$$R_2 = \frac{v_0^2 \sin(2 \cdot (90 - \omega))}{g} = \frac{v_0^2 \sin(180 - 2\omega)}{g} = \frac{v_0^2 \sin(2\omega)}{g} = R_1$$

Άρα το βεληνεκές της μπάλας είναι η ίδια και στις δυο περιπτώσεις.

Ασκήσεις για εξάσκηση

1. Σώμα βάλλεται από την οροφή ενός κτιρίου ύψους 40m, με αρχική ταχύτητα 20 m/s και γωνιά 30° ως προς τον οριζόντιο άξονα. Να βρείτε την οριζόντια απόσταση του σημείου όπου το σώμα χτυπά το έδαφος από την βάση του κτιρίου.
2. Η εξίσωση της τροχιάς ενός βλήματος στο SI είναι $y = -x^2 + 10x$. Να βρείτε το βεληνεκές του.
3. Βάλλουμε μια μπάλα από το έδαφος με αρχική ταχύτητα 20 m/s που σχηματίζει γωνιά 45° με τον οριζόντιο άξονα. Να βρείτε τη μέση διανυσματική ταχύτητα της μπάλας από τη στιγμή που εκτοξεύεται μέχρι να φτάσει στο μέγιστο ύψος της πτήσης του.

Λύσεις

1. Θα μελετήσουμε την κίνηση του σώματος στους 2 άξονες ξεχωριστά.

$$y = u_{0y}t + \frac{1}{2}gt^2$$

$$\Rightarrow 40 = (20\sin 30)t + 5t^2$$

$$\Rightarrow t^2 + 2t = 8$$

$$\Rightarrow (t - 2)(t + 4) = 0$$

$$\Rightarrow t = 2s$$

$$x = v_0t \cos \theta$$

$$\Rightarrow d = 2 \times 20 \times \cos 30 = 20\sqrt{3} \text{ m}$$

2. Για να υπολογίσουμε το βεληνεκές πρέπει να θέσουμε $y = 0$ στην εξίσωση της τροχιάς. Έτσι:

$$y = 0 \Rightarrow -x^2 + 10x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 10 \end{cases} \Rightarrow x = 10 \text{ m} \Rightarrow R = 10 \text{ m}$$

3. Θα υπολογίσουμε το μέγιστο ύψος, το χρονικό διάστημα για να φτάσει σε αυτό το ύψος καθώς και την οριζόντια μετατόπιση όταν φτάσει σε αυτό το ύψος.

$$t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \Rightarrow t = 20 \times \frac{\sqrt{2}}{2 \times 10} \Rightarrow t = \sqrt{2} \text{ s}$$

$$H = \frac{v_0^2 (\sin \alpha)^2}{2g} \Rightarrow H = \frac{400 \times \frac{1}{2}}{20} = 10 \text{ m} \Rightarrow \Delta y = 10 \text{ m}$$

$$\Delta x = u_x t = u_0 t \cos 45 = 20 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 20m$$

Το μέτρο της μετατόπισης είναι:

$$\Delta r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{20^2 + 10^2} = 10\sqrt{5} \, m$$

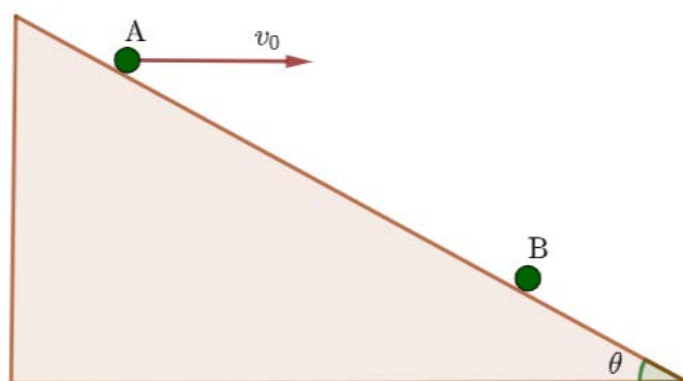
Άρα:

$$\bar{v} = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{10\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{10} \frac{m}{s}$$

Ασκήσεις ενότητας

1. Βάλλουμε ένα σώμα με γωνιά $\alpha < 90$ ως προς τον οριζόντιο άξονα προς τα πάνω. Ποια είναι η σχέση μεταξύ των διανυσμάτων της επιτάχυνσης και της ταχύτητας;
(Να επιλέξετε την σωστή απάντηση και να την δικαιολογήσετε)
Α) Σχηματίζουν μια οξεία γωνιά σε όλη την διαδρομή.
Β) Είναι κάθετα σε όλη την διαδρομή
Γ) Γίνονται κάθετα σε μια θέση της διαδρομής
Δ) Συμπίπτουν σε μια θέση της διαδρομής.
2. Μία μπάλα βάλλεται με αρχική ταχύτητα 20 m/s και γωνιά 30° ως προς τον οριζόντιο άξονα. Έστω ότι $\vec{D}$ είναι το διάνυσμα της μετατόπισης της μπάλας από την στιγμή που βάλλεται μέχρι να φτάσει στο μέγιστο ύψος. Να βρείτε τη γωνιά που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{D}$ με τον οριζόντιο άξονα όταν η μπάλα φτάνει στο μέγιστο ύψος.
3. Η εξίσωση της τροχιάς (στο S.I.) για ένα βλήμα που βάλλεται από το έδαφος είναι:
$$y = -\frac{x^2}{40} + 3x$$

Να βρείτε το μέγιστο ύψος στην πτήση του βλήματος.
4. Βάλλουμε μια σφαίρα από την επιφάνεια κεκλιμένου επιπέδου γωνιάς θ , στο σημείο Α με οριζόντια ταχύτητα v_0 . Η σφαίρα χτυπά το κεκλιμένο επίπεδο στο σημείο Β. Να υπολογίσετε την απόσταση ΑΒ συναρτήσει της αρχικής ταχύτητας του βλήματος και της επιτάχυνσης της βαρύτητας.



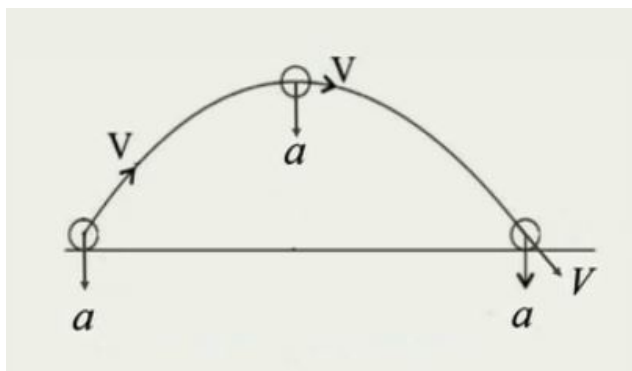
5. Ένα αυτοκίνητο κινείται σε ευθεία γραμμή με σταθερή θετική ταχύτητα v προς μια αρχικά ακίνητη μοτοσυκλέτα. Όταν το αυτοκίνητο βρίσκεται σε απόσταση 25 μέτρων από την μοτοσυκλέτα, τότε ο μοτοσικλετιστής ξεκινά να κινείται από την ηρεμία με σταθερή επιτάχυνση $2 \frac{m}{s^2}$. Εάν η μοτοσυκλέτα και το αυτοκίνητο συγκρούονται να βρείτε την ελάχιστη τιμή της ταχύτητας v .
6. Οι εξισώσεις κίνησης (στο επίπεδο) για το σώμα Α είναι:

$$\begin{cases} x_A = 8 \\ y_A = 3t^2 \end{cases} \text{ και για το σώμα Β είναι: } \begin{cases} x_B = 4t \\ y_B = 6t \end{cases}$$

 Να εξετάσετε κατά πόσο τα σώματα θα συγκρουστούν. Εάν συγκρούονται, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου στο οποίο συγκρούονται.
7. Βάλλουμε ένα σώμα με αρχική ταχύτητα v_0 και γωνιά α ως προς τον οριζόντιο άξονα από το έδαφος. Να βρείτε την ταχύτητα με την οποία χτυπά στο έδαφος δίνοντας την απάντησή σας στην διανυσματική μορφή $ai + bj$

Λύσεις

1.



Η ταχύτητα είναι πάντα εφαπτόμενη στην διαδρομή. Η επιτάχυνση, είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας και είναι κατακόρυφα προς τα κάτω. Δηλαδή όπως δείχνει το σχήμα τα διανύσματα της επιτάχυνσης και της ταχύτητας γίνονται κάθετα σε μια θέση της διαδρομής (μέγιστο ύψος). Απάντηση- Γ

2.

Όταν η μπάλα φθάνει στο μέγιστο της ύψος, έχουμε:

$$\Delta y = H = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}$$

Ξέρουμε όμως ότι φθάνει σε αυτό το ύψος σε χρονικό διάστημα

$$t = \frac{v_0 \sin \theta}{g}$$

$$\Rightarrow \Delta x = v_{0x} t = v_0 \cos \theta t = v_0 \frac{v_0 \sin \theta \cos \theta}{g} = \frac{v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g}$$

Τώρα αναλύουμε την μετατόπιση Δr σε δυο συνιστώσες Δx και Δy και έχουμε:

$$\tan \varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}}{\frac{v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g}} = \frac{\sin \theta}{2 \cos \theta} = \frac{\tan \theta}{2} \Rightarrow \tan \varphi = \frac{\tan 30^\circ}{2}$$

$$\Rightarrow \tan \varphi = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$\Rightarrow \varphi = 16,1^\circ$$

3.

Από την εξίσωση της τροχιάς μπορούμε να υπολογίσουμε το βεληνεκές θέτοντας $x = 0$ στην εξίσωση.

$$0 = -\frac{x^2}{40} + 30 \Rightarrow x = 120 \Rightarrow \boxed{R = 120m}$$

Το βλήμα φθάνει στο μέγιστο ύψος σε χρονικό διάστημα $t = \frac{v_0 \sin \theta}{g}$

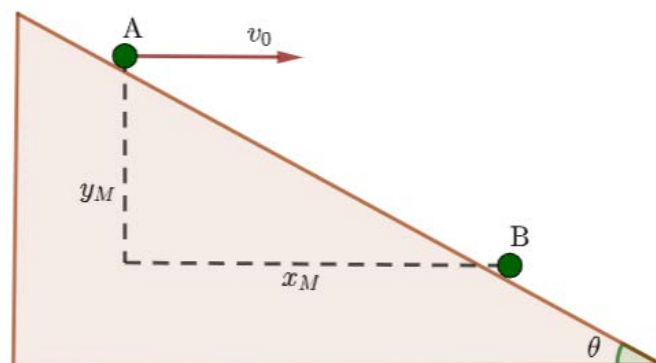
$$\Rightarrow x = v_{0x} t = v_0 \cos \theta t = v_0 \frac{v_0 \sin \theta \cos \theta}{g} = \frac{v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g} = \frac{R}{2}$$

$$\Rightarrow x_{\text{μέγιστο ύψος}} = \frac{R}{2} = 60m$$

$$\Rightarrow H = -\frac{x_{\text{μέγιστο ύψος}}^2}{40} + 3x_{\text{μέγιστο ύψος}}$$

$$\Rightarrow H = -\frac{60^2}{40} + 3 \times 60 \Rightarrow \boxed{H = 90m}$$

4.



Στο παραπάνω σχήμα έχουμε πως $x_M = |AB| \cos \theta$ και $y_M = -|AB| \sin \theta$

Από την εξίσωση της τροχιάς:

$$y = -\frac{gx^2}{2v_0^2} \Rightarrow -|AB| \sin \theta = \frac{g|AB|^2 \cos^2 \theta}{2v_0^2}$$

$$\xRightarrow{|AB| \neq 0} \sin \theta = \frac{g|AB| \cos^2 \theta}{2v_0^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{|AB| = \frac{2v_0^2 \sin \theta}{g \cos^2 \theta}}$$

5.

Για το αυτοκίνητο:

$$x_A = vt$$

Για τον μοτοσικλετιστή:

$$x_M = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow x_M = 25 + t^2$$

Όταν τα οχήματα συγκρούονται έχουμε $x_A = x_M$. Δηλαδή η εξίσωση $25 + t^2 = vt$, πρέπει να έχει λύση

$$25 + t^2 = vt$$

$$\Rightarrow t^2 - vt + 25 = 0$$

Πρέπει η διακρίνουσα της εξίσωσης να μην είναι αρνητική. Άρα:

$$\Delta \geq 0$$

$$\Rightarrow v^2 - 4 \times 25 \geq 0$$

$$\Rightarrow v^2 \geq 100$$

$$\xRightarrow{v \geq 0} v \geq 10$$

$$\Rightarrow \boxed{v_{\min} = 10 \frac{m}{s}}$$

6.

Θέτουμε $x_A = x_B$

$$\Rightarrow 4t = 8$$

$$\Rightarrow t = 2s$$

Επίσης θέτουμε $y_A = y_B$

$$3t^2 = 6t$$

$$\stackrel{t \neq 0}{\Rightarrow} t = 2s$$

Άρα τη χρονική στιγμή $t = 2s$ οι θέσεις των σωμάτων θα είναι οι ίδιες. Όμως σε αυτή την στιγμή $x_A = x_B = 8$ και

$$y_A = y_B = 6 \times 2 = 12$$

Άρα $r_{\Sigma} = (8, 12)$

7.

Στον άξονα x έχουμε κίνηση με σταθερή ταχύτητα, δηλαδή:

$$v_x = v_0 \cos \alpha = v_{0x}$$

Στον άξονα y , όταν το βλήμα φθάνει στο έδαφος έχουμε $y = 0$. Άρα από τις εξισώσεις κίνησης:

$$v_y^2 - v_{0y}^2 = -2gy \stackrel{y=0}{\Rightarrow} v_y = -v_{0y} = -v_0 \sin \alpha$$

$$\text{Δηλαδή } \vec{v} = v_x i + v_y j = \boxed{(v_0 \cos \alpha) i - (v_0 \sin \alpha) j}$$

Κεφάλαιο 2: Δυνάμεις

Όταν 2 σώματα αλληλοεπιδρούν, ασκούνται δυνάμεις μεταξύ τους. Η δύναμη είναι διανυσματικό μέγεθος (έχει φορά και διεύθυνση) και έχει μονάδα μέτρησης το 1 Newton (N). Το διανυσματικό άθροισμα των δυνάμεων που ασκούνται πάνω σε ένα σώμα λέγεται Συνισταμένη Δύναμη και συμβολίζεται με $\Sigma \vec{F}$

Οι δυνάμεις πάντα ακολουθούν 3 νόμους, που λέγονται Νόμοι του Νεύτωνα.

1^{ος} Νόμος του Νεύτωνα: Η συνισταμένη δύναμη πάνω σε ένα σώμα είναι μηδέν αν και μόνον αν είναι ακίνητο ή κινείται με σταθερή ταχύτητα.

Προσοχή 1: Εάν η συνισταμένη δύναμη πάνω σε οποιονδήποτε άξονα είναι μηδέν τότε ο 1^{ος} νόμος του Νεύτωνα ισχύει για κίνηση του σώματος σε αυτό το άξονα, και αντίστροφα

2^{ος} Νόμος του Νεύτωνα: Σε οτιδήποτε σώμα που κινείται επιταχυνόμενα ισχύει: $\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$

Όπου:

$\Sigma \vec{F}$ είναι η συνισταμένη δύναμη σε Newton

m είναι η μάζα του σώματος σε κιλά (kg)

$\vec{a}$ είναι η επιτάχυνση του σώματος σε $\frac{m}{s^2}$

3^{ος} Νόμος του Νεύτωνα: Εάν ένα σώμα Α ασκεί μία δύναμη $F_{A \rightarrow B}$ στο σώμα Β, τότε το σώμα Β ασκεί μια δύναμη $F_{B \rightarrow A}$ ίσου μέτρου και αντίθετης φοράς στο σώμα Α, και αποτελούν ζεύγος δράσης-αντίδρασης

Προσοχή 2: Οι δυνάμεις $F_{A \rightarrow B}$ και $F_{B \rightarrow A}$ ασκούνται σε **διαφορετικά** σώματα, και όχι στο ίδιο σώμα. Κατηγορίες δυνάμεων είναι: δυνάμεις από επαφή και δυνάμεις πεδίου.

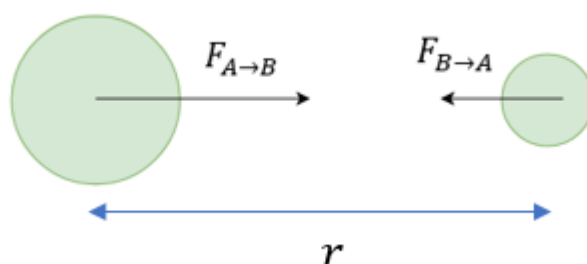
Δυνάμεις Πεδίου

Το Βάρος

Είναι η δύναμη που ασκεί η γη (η άλλο πλανήτη) σε ένα σώμα. Έχει φορά προς το κέντρο της γης και συμβολίζεται με W . Το μέτρο του υπολογίζεται ως $W = m \cdot g$

Ελκτικές δυνάμεις

Είναι η δύναμη που ασκείται μεταξύ δύο σωμάτων που έχουν μάζα.



Νόμος παγκόσμιας έλξης : Εάν 2 σώματα έχουν μάζες m_1 και m_2 και η απόσταση μεταξύ των κέντρων τους είναι r τότε η ελκτική δύναμη μεταξύ τους υπολογίζεται ως

$$F = \frac{G m_1 m_2}{r^2}$$

Όπου:

$\vec{F}$ είναι η δύναμη σε Newton

$m_{1,2}$ είναι οι μάζες των σωμάτων σε κιλά (kg)

r είναι η απόσταση σε m

Και $G = 6,67 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$ είναι η σταθερά της παγκόσμιας έλξης

Παράδειγμα : Ένας αερόλιθος μάζας 100 κιλών βρίσκεται σε απόσταση 10000 χιλιομέτρων από το κέντρο της γης. Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του αερολίθου.

(Δίνεται μάζα της Γης $= 5.972 \times 10^{24} \text{ kg}$)

Λύση: Από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα έχουμε

$$F = ma \Rightarrow \frac{GmM}{r^2} = ma \Rightarrow \frac{GM}{r^2} = a$$

Μετατρέπουμε τα μεγέθη σε SI

$$10000 \text{ km} = 10^4 \text{ km} = 10^7 \text{ m}$$

$$\text{Άρα } a = \frac{6,67 \times 10^{-11} \times 5.972 \times 10^{24}}{10^{14}} = \frac{6.67 \times 5.972}{10} = 3.99 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Ασκήσεις για εξάσκηση

1. Η μάζα του πλανήτη Α είναι 16 φορές μεγαλύτερη από τη μάζα του πλανήτη Β, και η απόσταση μεταξύ των κέντρων τους είναι d. Ένα διαστημόπλοιο ταξιδεύει πάνω στην ευθεία που ενώνει τα κέντρα των πλανητών. Σε ποια απόσταση από το πλανήτη Α πρέπει να βρίσκεται το διαστημόπλοιο, έτσι ώστε να δρα μηδενική συνισταμένη δύναμη πάνω σε αυτό;
2. Αν γνωρίζετε τη μάζα, την ακτίνα του πλανήτη Αφροδίτη και την σταθερά παγκόσμιας έλξης, να δείξετε ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια της Αφροδίτης έχει μέτρο ίσο με $8,79 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
Δίνεται: Ακτίνα της Αφροδίτης = $6,052 \times 10^6 \text{ m}$ και μάζα της Αφροδίτης = $4,867 \times 10^{24} \text{ kg}$

Λύσεις

1.

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow |F_A| - |F_B| = 0 \Rightarrow |F_A| = |F_B|$$

$$\Rightarrow \frac{GM_A m}{r^2} = \frac{GM_B m}{(d-r)^2} \Rightarrow \frac{M_A}{r^2} = \frac{M_B}{(d-r)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{16M_B}{r^2} = \frac{M_B}{(d-r)^2} \Rightarrow \frac{16}{r^2} = \frac{1}{(d-r)^2} \Rightarrow \frac{4}{r} = \frac{1}{d-r}$$

$$\Rightarrow 4d - 4r = r \Rightarrow 5r = 4d \Rightarrow r = \frac{4}{5}d$$

2.

Η απόσταση ενός σώματος από την επιφάνεια της Αφροδίτης μέχρι το κέντρο της ισούται ακριβώς με την ακτίνα της. Άρα η βαρυτική δύναμη που ασκείται πάνω στο σώμα δίνεται από:

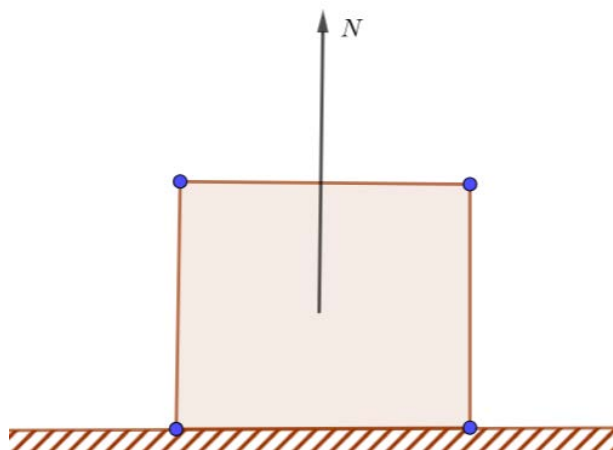
$$W = \frac{GM_A M_{\text{σώματος}}}{r_A^2}$$

$$\text{Όμως } W = M_{\text{σώματος}} g_A \Rightarrow g_A = \frac{GM_A}{r_A^2} = \frac{6,67 \times 10^{-11} \times 4,867 \times 10^{24}}{(6,052 \times 10^6)^2} = 8,9 \frac{m}{s^2}$$

Δυνάμεις από επαφή

Δύναμη κάθετη από την επιφάνεια

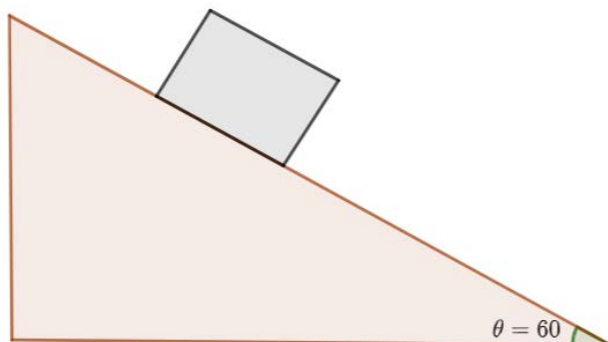
Δίνεται ένα βιβλίο πάνω σε ένα τραπέζι. Το βιβλίο έχει βάρος, αλλά και ισορροπεί. Άρα υπάρχει άλλη δύναμη που δέχεται το βιβλίο. Αυτό είναι μία δύναμη κάθετη στο επίπεδο του τραπεζιού N . **Το N δεν είναι αντίδραση του βάρους.** Γενικά όταν 2 επιφάνειες αγγίζουν ασκούνται κάθετες δυνάμεις μεταξύ τους.



Για να κατανοήσουμε την έννοια αυτής της δύναμης καλύτερα, θα μελετήσουμε το παρακάτω παράδειγμα.

Παράδειγμα 1: Δίνεται ένα σώμα μάζας 2 kg που αφήνεται να κινηθεί ελεύθερα στο παρακάτω κεκλιμένο επίπεδο γωνιάς 60° . Να υπολογίσετε:

- A) Τη δύναμη κάθετη από την επιφάνεια που δέχεται το σώμα
- B) Το μέτρο της επιτάχυνσης με την οποία κατέρχεται το σώμα



Λύση

Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα είναι το βάρος, καθώς και η κάθετη δύναμη από το κεκλιμένο επίπεδο.

Ο άξονας κίνησης του σώματος είναι παράλληλος με το κεκλιμένο επίπεδο. Για αυτό όταν έχουμε κεκλιμένο επίπεδο θέτουμε την διεύθυνση του **άξονα x παράλληλη με την διεύθυνση του κεκλιμένου επιπέδου** και θέτουμε την διεύθυνση του **άξονα y , κάθετη στην διεύθυνση του κεκλιμένου επιπέδου** (αφού ο άξονας y είναι πάντα κάθετος στον άξονα x).

Πρέπει να αναλύσουμε όλες τις δυνάμεις σε αυτούς τους άξονες, και σε αυτή την περίπτωση η μόνη δύναμη που δεν ανήκει στους άξονες είναι το βάρος, και για αυτό το αναλύουμε σε συνιστώσες W_y και W_x

A) Από τον Πρώτο νόμο του Νεύτωνα έχουμε:

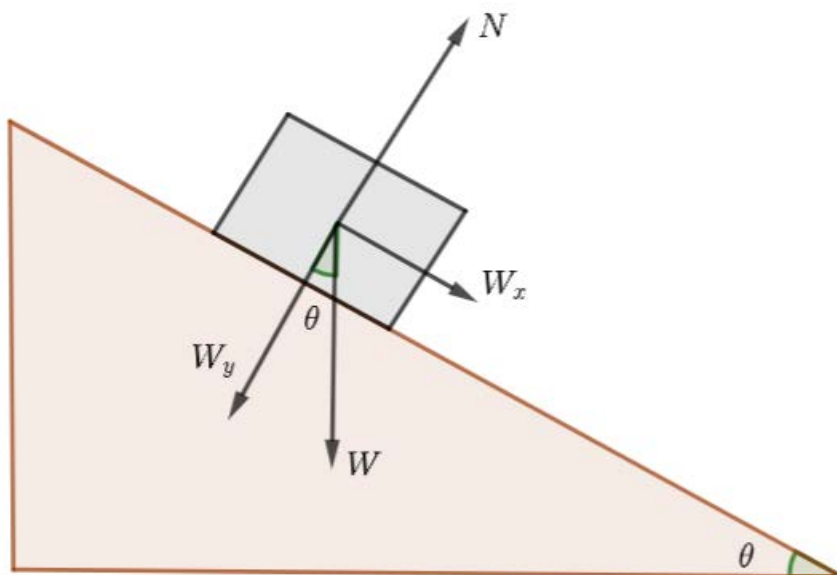
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow |N| - |W_y| = 0$$

$$\Rightarrow |N| = |W_y| = |W| \cos \theta = mg \cos \theta = 10 \times 0,5 = 10 \text{ Newton}$$

B) Επίσης από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, στον άξονα x έχουμε:

$$\sum F_x = ma \Rightarrow W_x = ma \Rightarrow |W| \sin \theta = ma$$

$$\Rightarrow mg \sin \theta = ma \Rightarrow a = g \sin \theta = 10 \times \sin 30^\circ = 8,7 \frac{m}{s^2}$$



Παράδειγμα 2: Κάποιος κύριος Χ, με μάζα 80 kg στέκεται σε ένα ανελκυστήρα μέσα στον οποίο υπάρχει ζυγαριά στο έδαφος. ο ανελκυστήρας επιταχύνεται προς τα κάτω, και η ένδειξη της ζυγαριάς είναι 60kg. Να εξηγήσετε αυτό το φαινόμενο, και να υπολογίσετε την επιτάχυνση του ανελκυστήρα.

Πρώτα πρέπει να δούμε πως ακριβώς λειτουργεί η ζυγαριά. Η ζυγαριά δουλεύει βάση των δυνάμεων που ασκούνται πάνω της. Η ζυγαριά ασκεί μια κάθετη δύναμη N στον Κύριο Χ. Από το **τρίτο νόμο του Νεύτωνα**, ο Κύριος Χ ασκεί μια δύναμη N' ίσου μέτρου με την N στη ζυγαριά. **Η ζυγαριά δείχνει το μέτρο αυτής της δύναμης** (μετατρέποντας σε κιλά).

Τώρα, από τον δεύτερο Νόμο του Νεύτωνα,

$$mg - N = ma$$

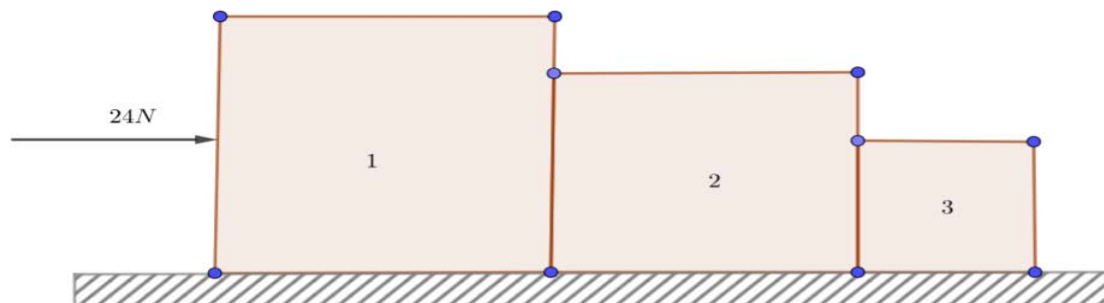
$$800 - N = 80a \Rightarrow N = N' = 800 - 80a < 800$$

Για αυτό, η ζυγαριά δείχνει μικρότερο αριθμό

Αντικαθιστώντας $N = 600$, έχουμε ότι η επιτάχυνση

$$a = \frac{200}{80} = 2,5 \text{ m/s}^2$$

Παράδειγμα 3: Δίνονται 3 σώματα που βρίσκονται σε επαφή το ένα με το άλλο όπως δείχνει το πιο κάτω σχήμα και είναι πάνω σε λεία επιφάνεια. Ασκούμε μια δύναμη 24 N στο σώμα 1. Εάν οι μάζες των σωμάτων (1) , (2) και (3) είναι 5 , 4 και 3 κιλά αντίστοιχα , να βρείτε το μέτρο της δύναμης που ασκεί το σώμα 3 στο σώμα 2.



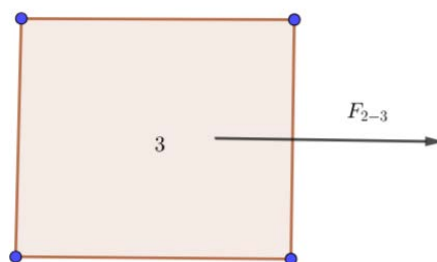
Λύση

Καταρχάς θα βρούμε την επιτάχυνση του **συστήματος**

Από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα

$$\Sigma F = ma \Rightarrow 24 = (5 + 4 + 3)a \Rightarrow a = 2 \text{ m/s}^2$$

Τώρα από τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα, η δύναμη που ασκεί το σώμα 3 στο σώμα 2, είναι αντίθετη της δύναμης που ασκεί το σώμα 2 στο σώμα 3. Αρκεί να μελετήσουμε το σώμα 3.



Η μόνη δύναμη που ασκείται πάνω του είναι η δύναμη F_{2-3}

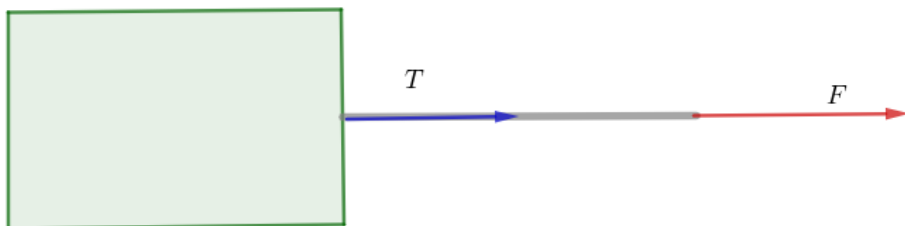
Άρα από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα,

$$\Sigma F = ma \Rightarrow F_{2-3} = 3 \times 3 = 9 \text{ N}$$

$$\text{Έτσι } F_{3-2} = -9 \text{ N}$$

Τάση του νήματος

Θεωρούμε ένα σώμα συνδεδεμένο με ένα νήμα. Τραβάμε το νήμα με τη δύναμη F και το νήμα θα ασκεί μια δύναμη T στο σώμα. Η δύναμη T που ασκείται από ένα νήμα σε άλλο σημείο του νήματος, ή σε ένα σώμα λέγεται «τάση του νήματος».



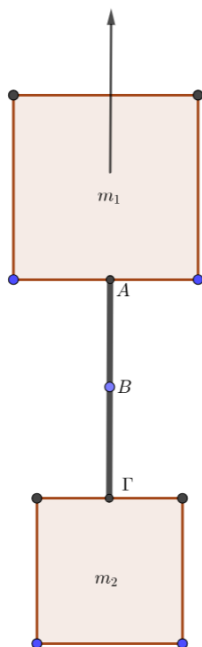
Για να υπολογίσουμε τη τάση του νήματος χρησιμοποιούμε τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα $|F| - |T| = ma$

Όπου m είναι η μάζα του νήματος και a είναι η επιτάχυνση του.

Σημείωση: Όταν το νήμα είναι αβαρές $m = 0 \Rightarrow |F| = |T|$

Προσοχή: Η τάση του νήματος έχει **κατεύθυνση προς το νήμα**.

Παράδειγμα 4: Δίνεται το παρακάτω σύστημα σωμάτων. Τα σώματα συνδέονται με νήμα μάζας 500 g. Οι μάζες των σωμάτων είναι $M_1 = 2 \text{ kg}$ και $M_2 = 1,5 \text{ kg}$. Ασκούμε μια δύναμη F μέτρου 100 N στο σώμα M_1 . Να βρείτε την τάση του νήματος στα σημεία A, B και Γ. (Τα A και Γ είναι τα άκρα του νήματος και B είναι το μέσο του νήματος)



Λύση : Καταρχάς θα υπολογίζουμε την επιτάχυνση του **συστήματος**.

Από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα: $\Sigma F = ma$

$$F - (M_1g + M_2g + M_Ng) = (M_1 + M_2 + M_N)a$$

$$\Rightarrow a = \frac{F - (M_1g + M_2g + M_Ng)}{M_1 + M_2 + M_N} = \frac{100 - (2 + 1,5 + 0,5)}{2 + 1.5 + 0.5} = 24 \frac{m}{s^2}$$

Αφού τα σώματα (και το νήμα) συνδέονται, όλα έχουν την ίδια επιτάχυνση. Τώρα χρησιμοποιώντας το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα,

$$F - T_A - W_1 = (M_1)a \quad : (1)$$

$$T_A = F - M_1g - M_1a = 100 - 20 - 48 = 32 \text{ N}$$

$$T_B - \left(\frac{M_N}{2} + M_2\right)g = \left(\frac{M_N}{2} + M_2\right)a \Rightarrow T_B = 59,5 \text{ N} \quad : (2)$$

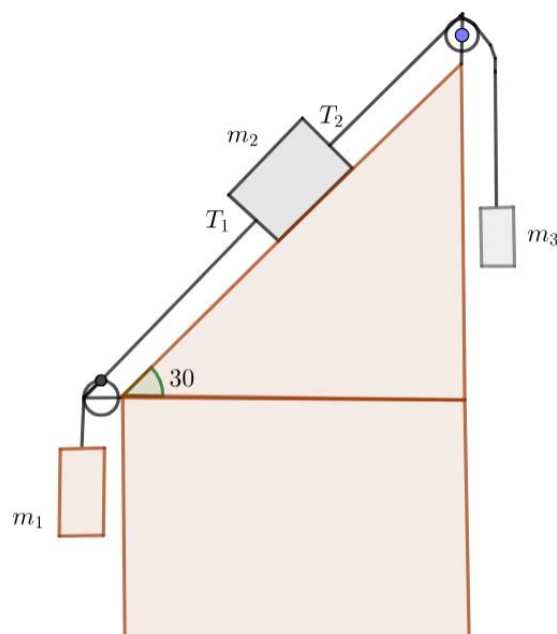
$$T_F - m_2g = m_2a \Rightarrow T_F = 51 \text{ N} \quad : (3)$$

(M_N είναι η μάζα του νήματος)

Παράδειγμα 6: Δίνεται το παρακάτω σύστημα. Έχουμε 3 σώματα μαζών $m_1 = 3 \text{ kg}$, $m_2 = 2 \text{ kg}$ και $m_3 = 1 \text{ kg}$. Η επιφάνεια του κεκλιμένου επίπεδου είναι λεία και έχει γωνιά 30° .

Να προσδιορίσετε τον λόγο $\frac{T_1}{T_2}$ εάν τα νήματα είναι αβαρή.

(T_1 και T_2 είναι οι τάσεις των νημάτων όπως δείχνεται στο παρακάτω σχήμα.)



Λύση

Θα μελετήσουμε κάθε σώμα ξεχωριστά και θα εφαρμόζουμε τον δεύτερο νόμο Νεύτωνα για το καθένα ξεχωριστά. Έστω ότι η θετική φορά είναι αριστερόστροφα. Τα νήματα είναι αβαρή, άρα στο νήμα 1, σε όλα τα σημεία η τάση του νήματος είναι T_1 και στο νήμα 2, σε όλα τα σημεία η τάση του νήματος είναι T_2 . Έχουμε κεκλιμένο επίπεδο, άρα ο άξονας κίνησης είναι παράλληλος με το κεκλιμένο επίπεδο. Όλες οι δυνάμεις στο σώμα 2, πρέπει να αναλυθούν σε αυτό τον άξονα.

$$\text{Σώμα 1: } W_1 - T_1 = m_1 a$$

$$\text{Σώμα 2: } T_1 + W_2 \cos 30 - T_2 = m_2 a$$

$$\text{Σώμα 3: } T_2 - W_3 = m_3 a$$

Προσθέτοντας κατά μέλη, έχουμε

$$W_1 + W_2 \cos 30 - W_3 = (m_1 + m_2 + m_3) a$$

$$\Rightarrow a = \frac{m_1 g + m_2 g \cos 30 - m_3 g}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{30 + 17,3 - 10}{6} = 6,2 \frac{m}{s^2}$$

Μελετούμε ξανά τα σώματα 1 και 2:

$$T_1 = W_1 - m_1 a = 11,4 \text{ N}$$

$$T_2 = W_3 + m_3 a = 16,2 \text{ N}$$

$$\Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = 0,7$$

Η τριβή

Η τριβή είναι μια δύναμη στην επιφάνεια επαφής δυο σωμάτων, και αντιστέκεται στην κίνηση τους.

Υπάρχουν δυο είδους τριβής, η στατική τριβή και η κινητική τριβή.

Όταν δυο σώματα είναι σχετικά ακίνητα, δηλαδή, το ένα δεν κινείται ως προς το άλλο, τότε έχουμε στατική τριβή. Εάν κινούνται έχουμε

κινητική τριβή. Υποτίθεται ότι θέλουμε να τραβήξουμε ένα πολύ βαρύ και μεγάλο κιβώτιο, με την χρήση ενός νήματος. Στην αρχή, όταν το κιβώτιο είναι ακίνητο είναι πολύ δύσκολο να το τραβήξουμε. Όσο αυξάνουμε την δύναμη μας στο νήμα, το κιβώτιο αντιστέκεται να κινηθεί, μέχρι να αυξήσουμε πολύ τη δύναμη. Από εκεί και πέρα το κιβώτιο αρχίζει να κινείται, και χρειαζόμαστε μικρότερη δύναμη για να συνεχίσει να κινείται.



Αυτό γίνεται, αφού υπάρχει στατική τριβή μεταξύ του κιβωτίου και του εδάφους. Όσο αυξάνουμε τη δύναμη στο νήμα, η στατική τριβή f_s αυξάνεται, μέχρι να πάρει τη μέγιστη τιμή της $f_{s_{max}}$. Από εκεί και πέρα, το κιβώτιο αρχίζει να κινείται, και έχουμε κινητική τριβή f_k .

Η τριβή εξαρτάται από την κάθετη δύναμη από την επιφάνεια, και τις φυσικές ιδιότητες των επιφανιών.

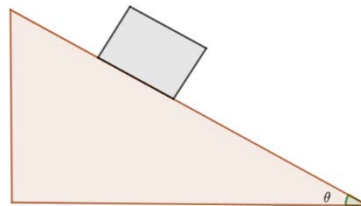
Η μέγιστη στατική τριβή υπολογίζεται ως $|f_{s_{max}}| = |N| \cdot \mu_s$ όπου μ_s είναι ο **συντελεστής στατικής τριβής** μεταξύ των επιφανιών, και N είναι η δύναμη κάθετη από την επιφάνεια που δέχεται στο σώμα.

Η κινητική τριβή υπολογίζεται ως $|f_k| = |N| \cdot \mu_k$ όπου μ_k είναι ο **συντελεστής κινητικής τριβής** μεταξύ των επιφανιών, και N είναι η δύναμη κάθετη από την επιφάνεια που δέχεται στο σώμα.

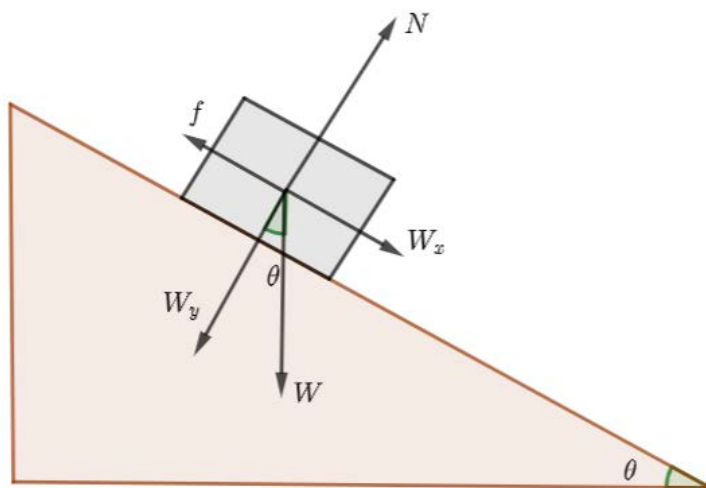
Παράδειγμα 7 : Δίνεται το παρακάτω κεκλιμένο επίπεδο με μεταβαλλόμενη γωνιά θ . Ένα σώμα μάζας 2 kg αφήνεται να κινηθεί κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου. Δίνεται ότι οι συντελεστές τριβής μεταξύ του σώματος και του επιπέδου είναι $\mu_s = 0,3$ και $\mu_k = 0,2$. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της γωνίας θ του κεκλιμένου επιπέδου έτσι ώστε το σώμα:

A) Να κατέρχεται με σταθερή ταχύτητα

B) Να μένει ακίνητο



Λύση



A) Έχουμε κινητική τριβή

Από το πρώτο νόμο του Νεύτωνα πρέπει να είναι

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N - W_y = 0 \Rightarrow N = W_y = mg \cos \theta$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow W_x - f_k = 0 \Rightarrow mg \sin \theta = f_k$$

$$\text{Αλλά } f_k = N \mu_k = \mu_k mg \cos \theta$$

Άρα πρέπει να έχουμε

$$\mu_k mg \cos \theta = mg \sin \theta$$

$$\mu_k = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$$

Δηλαδή πρέπει να έχουμε $\tan\theta = 0,25 \Rightarrow \theta = 14^\circ$

B) Έχουμε στατική τριβή

Από το πρώτο νόμο του Νεύτωνα πρέπει να είναι

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N - W_y = 0 \Rightarrow N = W_y = mg\cos\theta$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow W_y - f_s = 0 \Rightarrow mg\sin\theta = f_s$$

$$\text{Επίσης } f_s \leq f_{s_{\max}} = \mu_s N = \mu_s mg\cos\theta$$

$$\text{Οπότε } mg\sin\theta \leq \mu_s mg\cos\theta \Rightarrow \mu_s \geq \tan\theta \Rightarrow \tan\theta \leq 0,3$$

Για να έχουμε μέγιστη γωνιά θ πρέπει να έχουμε μέγιστη επαπτομένη. Έτσι $\tan\theta = 0,3 \Rightarrow \theta_{\max} = 16,7^\circ$

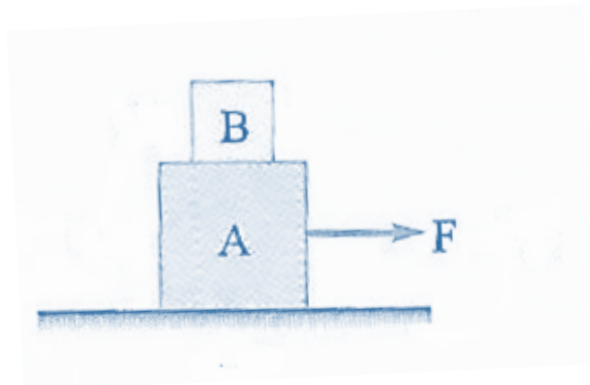
Ερώτηση: Η φορά της τριβής είναι πάντα αντίθετη με τη φορά κίνησης ενός σώματος;

Η απάντηση σε αυτή την ερώτηση είναι όχι. Για να κατανοήσουμε την έννοια της τριβής θα αναφερθούμε καταρχήν σε αυτό το παράδειγμα.

Δίνεται ένα κουτί πάνω σε ένα φορτηγάκι που κινείται μαζί του με επιτάχυνση a προς τα αριστερά. Αφού το κουτί επιταχύνεται, ασκείται μια δύναμη στην κατεύθυνση της επιτάχυνσης. Αυτή τη δύναμη είναι η δύναμη τριβής και έχει την ίδια φορά με την κίνηση του κουτιού.

Παράδειγμα 8: Στο παρακάτω σχήμα δίνεται δύο σώματα A και B, μαζών M_A και M_B το ένα πάνω στο άλλο. Ασκούμε μια οριζόντια δύναμη μέτρου F πάνω στο σώμα A και τα σώματα κινούνται μαζί. Εάν η τριβή μεταξύ το σώματος A και του εδάφους είναι αμελητέα,

να υπολογιστεί το μέτρο της τριβής μεταξύ των σωμάτων A και B συναρτήσει των μεγεθών M_A , M_B και F .



Λύση:

Αρχικά θα βρούμε την επιτάχυνση του **συστήματος**.

Χρησιμοποιώντας το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, έχουμε:

$$(M_A + M_B)a = F \Rightarrow a = \frac{F}{M_A + M_B}$$

Πάνω στο σώμα B, η μόνη δύναμη που ασκείται στον άξονα X είναι η τριβή που έχει την ίδια φορά με την επιτάχυνση a .

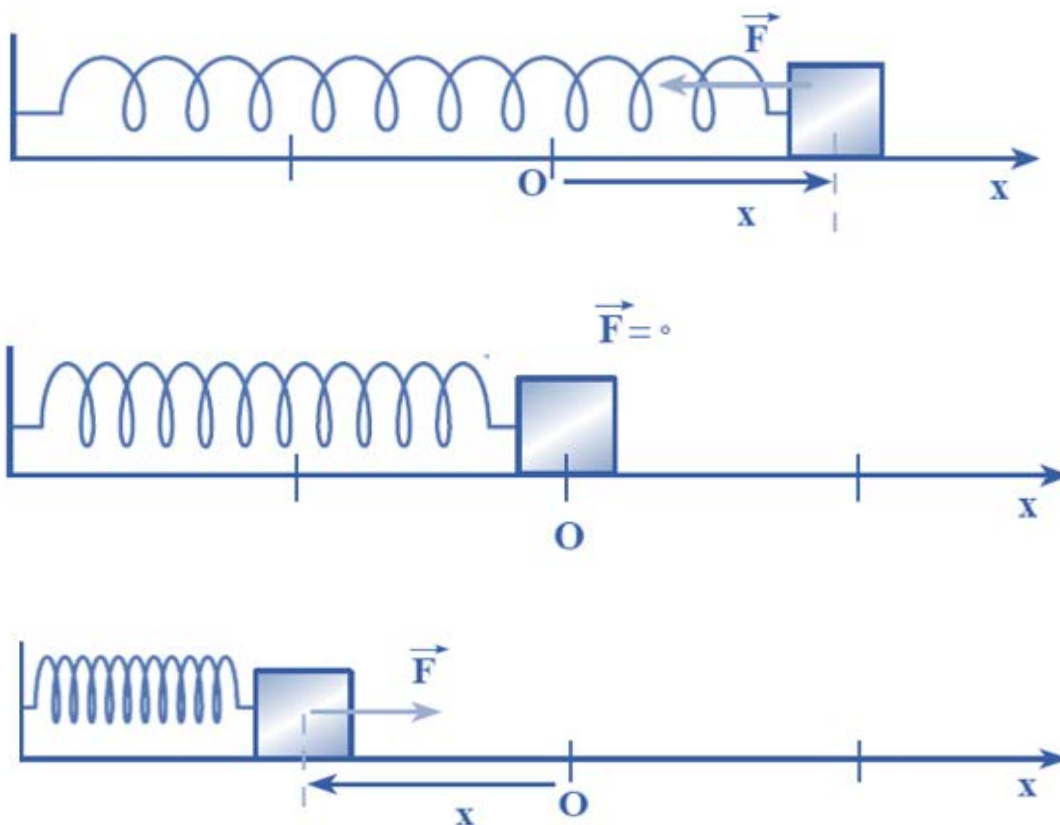
Άρα από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για αυτό το σώμα:

$$M_B a = f_s$$

$$\Rightarrow \boxed{f_s = \frac{F M_B}{M_A + M_B}}$$

Η δύναμη ελατηρίου

Η δύναμη που ασκεί ένα ελατήριο σε ένα σώμα λόγω επιμήκυνσης ή συσπίρωσης λέγεται δύναμη ελατηρίου. Όταν ένα σώμα συνδέεται με ελατήριο και το ελατήριο επιμηκώνεται, αφού το ελατήριο θέλει να επανέλθει στο φυσικό του μέγεθος, ασκεί μια δύναμη στο σώμα αντίθετη της μετατόπισης του. Ομοίως εάν το ελατήριο συσπείρώνεται, ασκεί μια δύναμη στο σώμα αντίθετη της μετατόπισης του.



Γενικά η δύναμη ελατηρίου έχει αλγεβρική τιμή:

$F = -kx$, όπου k είναι η **σταθερά ελατηρίου** σε $\frac{N}{m}$ (το οποίο είναι ένας ειδικός αριθμός για κάθε ελατήριο) και x είναι η μετατόπιση του ελεύθερου άκρου (το άκρο στον οποίο συνδέουμε σώμα).

Παράδειγμα 9: Το παρακάτω σώμα μάζας 1 kg συνδέεται με κατακόρυφο ελατήριο και ισορροπεί. Εάν το ελατήριο έχει επιμηκυνθεί από το φυσικό του μέγεθος κατά 4m, να υπολογίζετε τη σταθερά ελατηρίου.

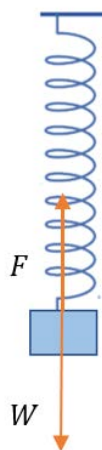


Λύση:

Από τον Πρώτο νόμο του Νεύτωνα έχουμε:

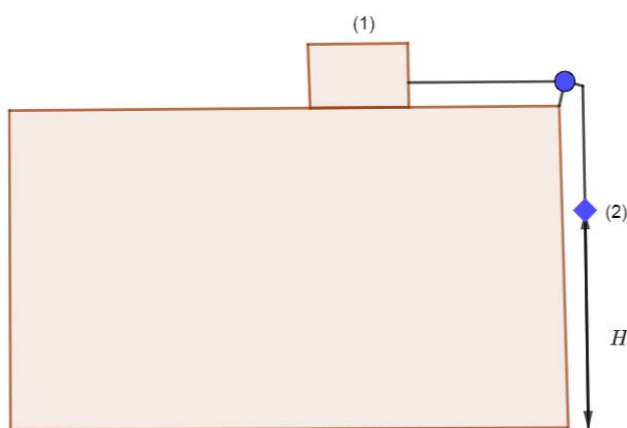
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow |W| - |F| = 0 \Rightarrow |F| = mg = 1 \times 10 = 10N$$

$$F = -|F| = -10N \Rightarrow -kx = -10 \Rightarrow 4k = 10 \Rightarrow k = 2,5 \frac{N}{m}$$



Ασκήσεις για εξάσκηση

1. Στο παρακάτω σχήμα, τα σώματα 1 και 2 μάζας m_1 και m_2 αντίστοιχα συνδέονται με αβαρές νήμα. Ο συντελεστής κινητικής τριβής μεταξύ του σώματος 1 και του οριζόντιου επιπέδου είναι μ_k . Το σύστημα αφήνεται να κινηθεί ελεύθερα από ηρεμία και το σώμα 2 έχει αρχικό ύψος H από το έδαφος. Να βρεθεί ο χρόνος που χρειάζεται ώστε το σώμα 2 να χτυπήσει στο έδαφος, συναρτήσει των μαζών m_1 και m_2 , του συντελεστή κινητικής τριβής μ_k , του αρχικού ύψους H και της επιτάχυνσης της βαρύτητας g .



2. Ένα παιδί μάζας 80 kg παίζει πάνω σε μια τσουλήθρα η οποία σχηματίζει γωνιά 30° με τον οριζόντιο άξονα. Το παιδί αρχίζει να ολισθαίνει προς τα κάτω από αρχικό κατακόρυφο ύψος 3m. Εάν ο συντελεστής τριβής μεταξύ της τσουλήθρας και του παιδιού είναι 0,3, να βρείτε την ταχύτητα του παιδιού όταν φτάσει στο έδαφος.

Λύσεις

1.

Γράφουμε τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για κάθε σώμα ξεχωριστά.

$$\begin{cases} T - f_{k1} = m_1 a \\ W_2 - T = m_2 a \end{cases} \Rightarrow W_2 - f_{k1} = a(m_1 + m_2)$$

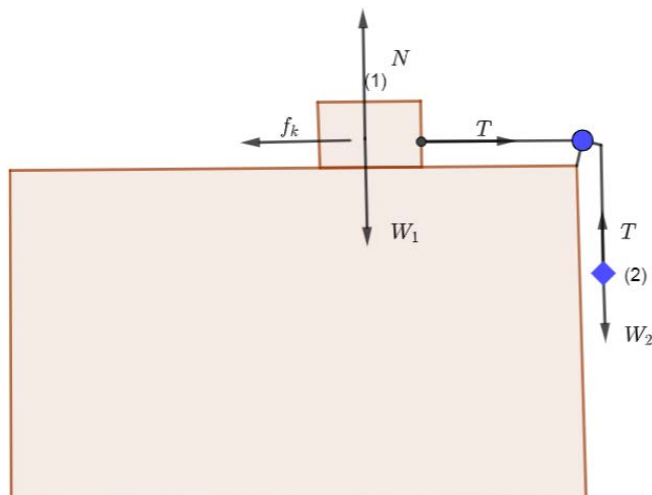
$$\Rightarrow a = \frac{W_2 - f_{k1}}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 g - \mu_k N_1}{m_1 + m_2}$$

Όμως από τον πρώτο νόμο του Νεύτωνα:

$$W_1 - N_1 = 0 \Rightarrow N_1 = m_1 g$$

$$\Rightarrow a = \frac{m_2 g - \mu_k m g}{m_1 + m_2}$$

$$y = \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow H = \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2H}{a}} = \sqrt{2H \left(\frac{m_1 + m_2}{m_2 g - \mu_k m g} \right)}$$



2.

$$\Sigma F = ma \Rightarrow W_y - f_k = ma \Rightarrow mg \sin \theta - \mu_k N = ma$$

$$W_y - N = 0 \Rightarrow N = mg \cos \theta$$

$$\Rightarrow mg \sin \theta - \mu_k mg \cos \theta = ma \Rightarrow a = g(\sin \theta - \mu_k \cos \theta)$$

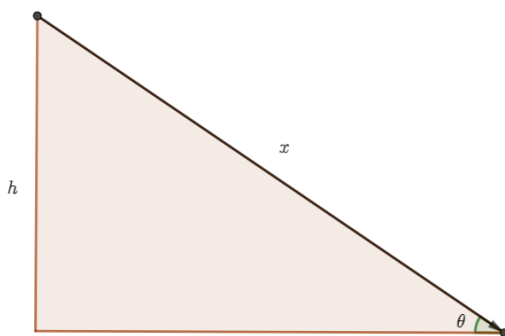
Όμως από την τριγωνομετρία (στο παρακάτω σχήμα)

$$\sin \theta = \frac{h}{x} \Rightarrow x = \frac{h}{\sin \theta}$$

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow v^2 = 2g(\sin \theta - \mu_k \cos \theta) \frac{h}{\sin \theta}$$

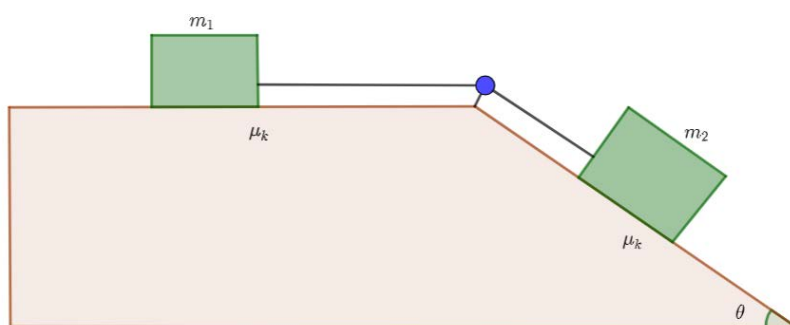
$$\Rightarrow v = \sqrt{2gh \left(1 - \frac{\mu_k}{\tan \theta}\right)}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{2 \times 10 \times 3 \times \left(1 - \frac{0,3}{\tan 30}\right)} = 5,4 \frac{m}{s}$$

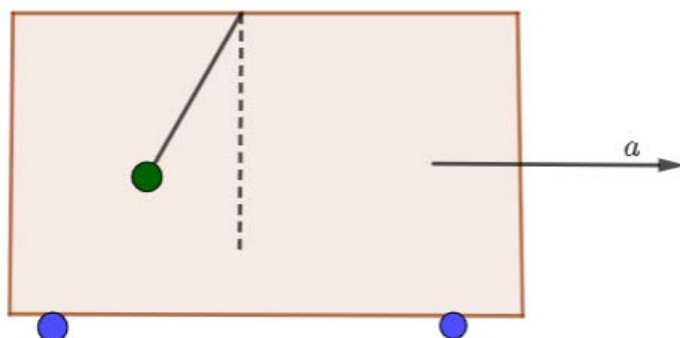


Ασκήσεις ενότητας

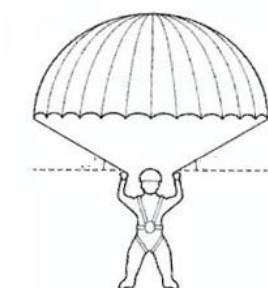
1. Δίνεται το παρακάτω σύστημα το οποίο αποτελείται από δυο σώματα μαζών m_1 και m_2 τα οποία συνδέονται με αβαρές νήμα και λεία τροχαλία. Το σώμα μάζας m_1 βρίσκεται σε οριζόντιο επίπεδο, ενώ το σώμα μάζας m_2 Το σύστημα αφήνεται να **κινηθεί** ελεύθερα. Εάν ο συντελεστής κινητικής τριβής μεταξύ των σωμάτων και των επιφανιών είναι μ_k , να υπολογίσετε την επιτάχυνση του συστήματος συναρτήσει των μαζών, του συντελεστή τριβής, της γωνιάς θ και της επιτάχυνση της βαρύτητας.



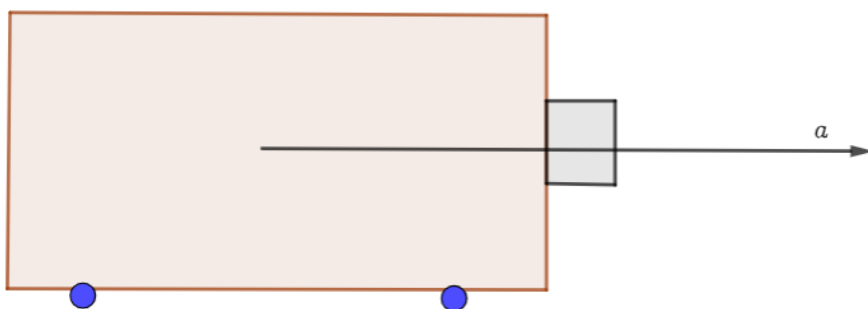
2. Το παρακάτω βαγόνι κινείται σε ευθεία γραμμή με σταθερή επιτάχυνση a . Ένα σώμα μάζας m συνδέεται από την οροφή του βαγονιού με αβαρές νήμα, και το σώμα είναι ακίνητο ως προς το βαγόνι (δηλαδή κινείται σε ευθεία γραμμή με την ίδια επιτάχυνση). Να υπολογίζετε την γωνιά θ που σχηματίζει το νήμα με τον κατακόρυφο άξονα συναρτήσει της επιτάχυνσης και της επιτάχυνσης της βαρύτητας



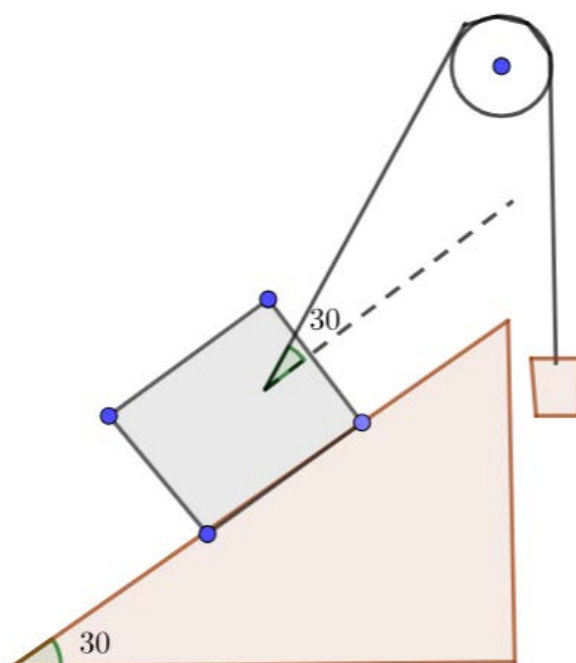
3. Στο παρακάτω σχήμα ο αλεξιπτωτιστής μάζας 60 κιλών έρχεται κάτω σε μια στιγμή με σταθερή επιτάχυνση $4 \frac{m}{s^2}$ με την χρήση αλεξιπτώτου μάζας 5 κιλών. Ο αλεξιπτωτιστής κρατά το αλεξιπτωτο του με δύο αβαρή νήματα ίσου μήκους που σχηματίζουν γωνιά 30° με τον οριζόντιο άξονα. Εάν η αντίσταση του αέρα στον αλεξιπτωτιστή είναι αμελητέα, να υπολογίσετε τις τάσεις των νημάτων.

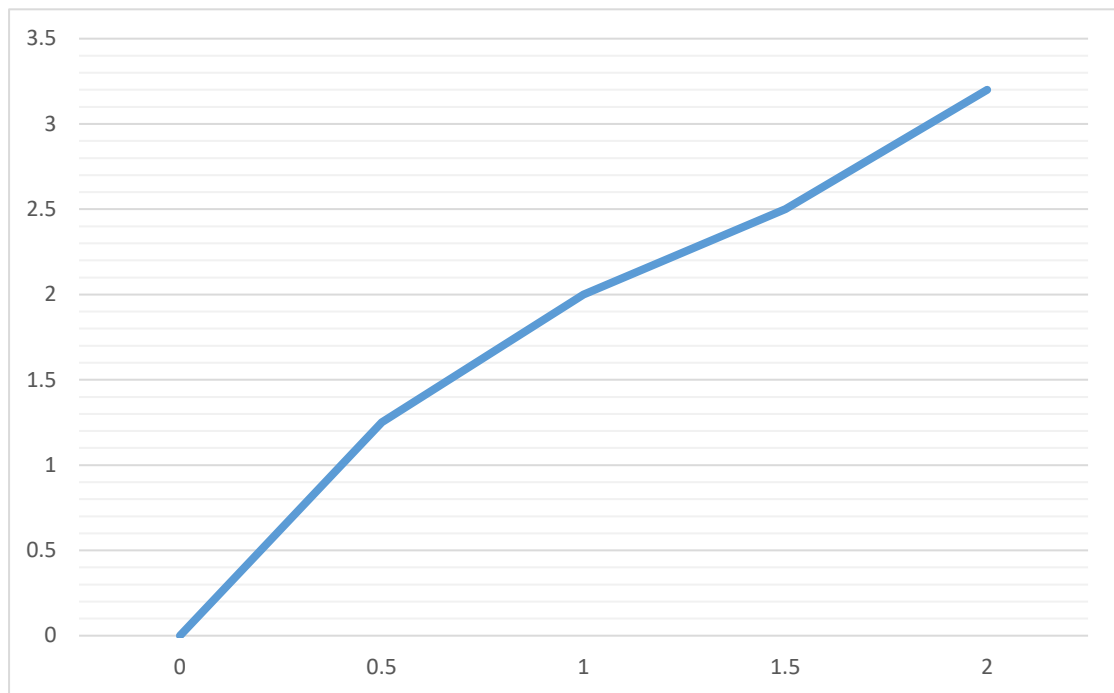


4. Το παρακάτω βαγονάκι κινείται με σταθερή επιτάχυνση σε ευθεία γραμμή. Ξύλινο σώμα είναι σε επαφή με την κατακόρυφη έδρα του βαγονιού όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Ο συντελεστής τριβής μεταξύ του ξύλου και βαγονιού είναι 0,5. Να υπολογίσετε την ελάχιστη επιτάχυνση του βαγονιού, ώστε το ξύλινο σώμα να μην πέφτει.



5. Ο κύριος Χ, θέλει να ελέγχει τον συντελεστή κινητικής τριβής μεταξύ ενός ξύλινου κεκλιμένου επιπέδου γωνιάς 30° και ενός κύβου ψευδαργύρου. Ακολουθεί ένα περίπλοκο πείραμα! Τοποθετεί ένα κύβο ψευδαργύρου μάζας 600 γραμμαρίων και τον συνδέει με ένα σχετικά αβαρές νήμα. Το νήμα σχηματίζει γωνιά 30° με την επιφάνεια του κεκλιμένου επιπέδου. Το νήμα περνά από λεία τροχαλία που ενώνεται με τον όροφο και στην άλλη άκρη του νήματος συνδέει ένα σώμα μάζας 800 γραμμάρια. Το σύστημα αφήνεται να κινηθεί ελεύθερα, και χρησιμοποιώντας ένα αισθητήρα κίνησης μελετά την κίνηση του κύβου. Ο υπολογιστής του παρουσιάζει την γραφική-παράσταση ταχύτητας-χρόνου που φαίνεται παρακάτω. Να μελετήσετε την γραφική παράσταση, να εξηγήσετε γιατί η γραφική παράσταση είναι καμπύλη και να βρείτε τον συντελεστή κινητικής τριβής μεταξύ του ξύλινου κεκλιμένου επιπέδου και ψευδαργύρου.





6. Πόσες μοίρες πρέπει να είναι η γωνιά μιας κεκλιμένης στέγης έτσι ώστε όταν πέφτουν πάνω στην στέγη σταγόνες βροχής, να πέσουν κάτω στο ελάχιστο δυνατό χρόνο; (Δεν υπάρχει τριβή μεταξύ της στέγης και του σταγόνα νερού)
(Βιβλίο φυσικής Έντβαρντ Γκίτζ)



(Δίνεται η τριγωνομετρική ταυτότητα $\sin(2a) = 2\sin a \cos a$)

Λύσεις

1.

Γράφουμε τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για κάθε σώμα ξεχωριστά.

$$\begin{cases} T - f_{k1} = m_1 a \\ W_{2x} - T - f_{k2} = m_2 a \end{cases} \Rightarrow W_{2x} - f_{k1} - f_{k2} = a(m_1 + m_2)$$

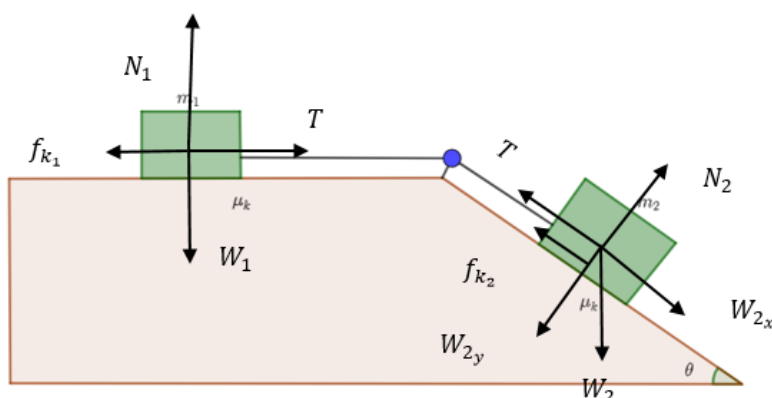
$$\Rightarrow a = \frac{W_{2x} - f_{k1} - f_{k2}}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 g \sin \theta - \mu_k N_1 - \mu_k N_2}{m_1 + m_2}$$

Όμως από τον πρώτο νόμο του Νεύτωνα:

$$W_1 - N_1 = 0 \Rightarrow N_1 = m_1 g$$

$$W_{2y} - N_2 = 0 \Rightarrow N_2 = m_2 g \cos \theta$$

$$\Rightarrow a = \frac{m_2 g \sin \theta - \mu_k m_1 g - \mu_k m_2 g \cos \theta}{m_1 + m_2}$$

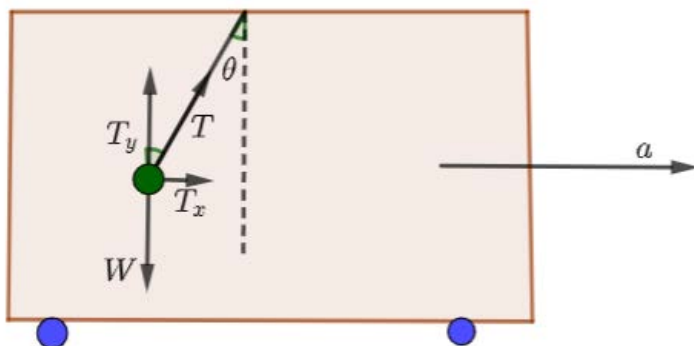


2.

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T_y - W = 0 \Rightarrow T_y = mg \Rightarrow T \cos \theta = mg \Rightarrow T = \frac{mg}{\cos \theta}$$

$$\Sigma F_x = ma \Rightarrow T_x = ma \Rightarrow T \sin \theta = ma \Rightarrow a = \frac{T \sin \theta}{m}$$

$$\Rightarrow a = \frac{\frac{mg}{\cos \theta} \sin \theta}{m} = \frac{g \sin \theta}{\cos \theta} \Rightarrow g \tan \theta = a \Rightarrow \theta = \tan^{-1} \left(\frac{a}{g} \right)$$



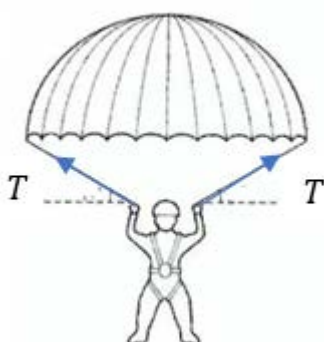
3.

Αφού τα νήματα σχηματίζουν την ίδια γωνιά με τον οριζόντιο άξονα, οι τάσεις των νημάτων είναι ίσες στα δυο νήματα.

Από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα

$$\Sigma F_y = ma \Rightarrow mg - 2T_y = ma \Rightarrow mg - 2T \sin 30 = ma$$

$$\Rightarrow mg - T = ma \Rightarrow T = m(g - a) = 60(10 - 4) = 360N$$



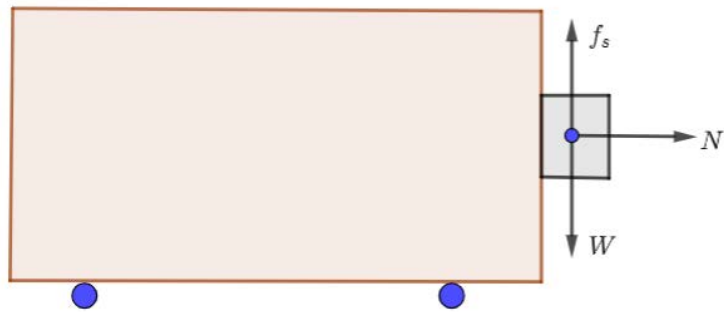
4.

Έχουμε:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow |f_s| - |W| = 0 \Rightarrow |f_s| = mg$$

$$|f_s| \leq |f_{s_{max}}| = \mu_s |N| \Rightarrow N \geq \frac{mg}{\mu_s}$$

$$\sum F_x = ma \Rightarrow N = ma \Rightarrow ma \geq \frac{mg}{\mu_s} \Rightarrow a \geq \frac{g}{\mu_s} = \frac{10}{0,5} = \frac{20m}{s^2}$$

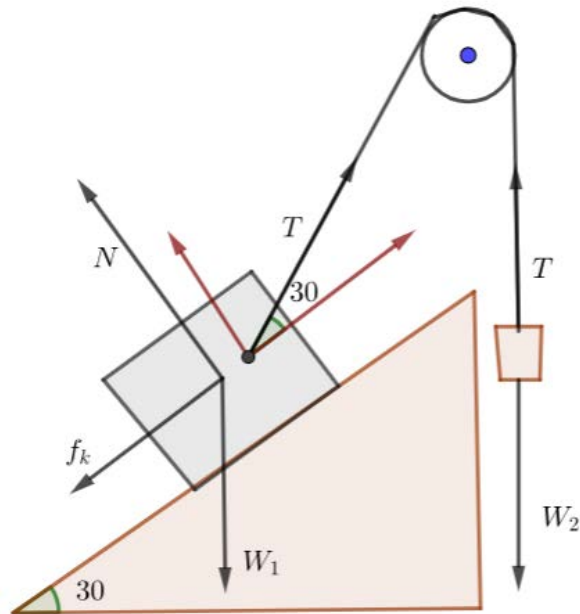


5.

Στην αρχή το σύστημα έχει μια συγκεκριμένη επιτάχυνση. Όταν ξεκινά να κινείται η γωνία μεταξύ του νήματος και της επιφάνειας, αλλάζει συνεχώς και επομένως η συνισταμένη δύναμη αλλάζει. Άρα η επιτάχυνση του σώματος αλλάζει (από 2^ο νόμο του Νεύτωνα) και η γραφική του παράσταση είναι καμπύλη.

Πρώτα θα βρούμε την επιτάχυνση του συστήματος από την κλίση της γραφικής παράστασης σε ένα μικρό αρχικό κομμάτι.

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{1.25 - 0}{0.5 - 0} = 2,5 \frac{m}{s^2}$$



Γραφούμε το 2^ο νόμο του Νεύτωνα για κάθε σώμα.

$$mg - T = ma \Rightarrow 8 - T = 0,8 \times 2,5 \Rightarrow T = 6 \text{ N}$$

$$T \cos 30 - Mg \sin 30 - f_k = Ma$$

$$\Rightarrow 6 \times \frac{1,7}{2} - 6 \times 0,5 - f_k = 0,6 \times 2,5 \Rightarrow \boxed{f_k = 0,6 \text{ N}}$$

Θα βρούμε την δύναμη N. Από πρώτο νόμο του Νεύτωνα

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N + T \sin 30 - Mg \cos 30 = 0$$

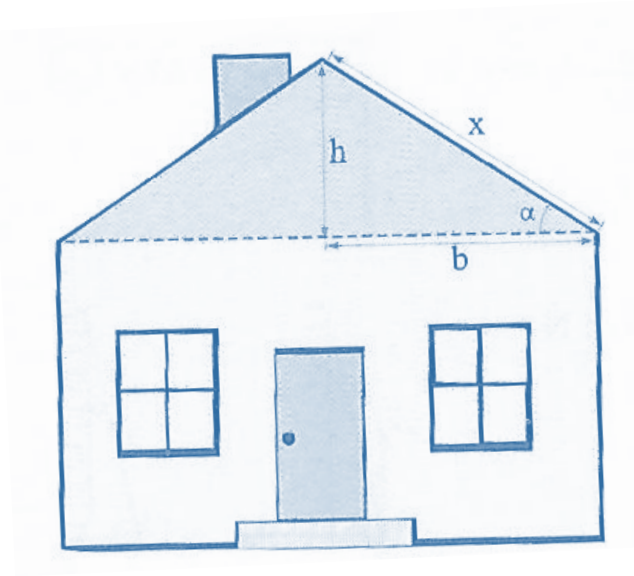
$$N = Mg \cos 30 - T \sin 30 = 6 \times \frac{1,7}{2} - 6 \times 0,5 = 2,1 \text{ Newtons}$$

$$\mu_k = \frac{f_k}{N} = \frac{0,6}{2,1} = 0,29$$

6.

Σύμφωνα με το παρακάτω σχήμα έχουμε:

$$\cos a = \frac{b}{x}$$



Για μια σταγόνα νερού γράφουμε την εξίσωση κίνησης της στο κεκλιμένο επίπεδο.

$$x = \frac{1}{2}At^2 + v_0t = \frac{1}{2}At^2$$

Από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα:

$$mA = W_y \Rightarrow mA = mgsina \Rightarrow A = gsina$$

Άρα:

$$x = \frac{1}{2}(gsina)t^2 \Rightarrow \frac{b}{cosa} = \frac{1}{2}gt^2sina \Rightarrow t^2 = \frac{2b}{gsinacosa}$$

$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{2b}{gsinacosa}}$$

Τώρα από την τριγωνομετρική ταυτότητα $\sin(2a) = 2sinacosa$ έχουμε:

$$t = \sqrt{\frac{2b}{g \sin a \cos a}} = 2 \sqrt{\frac{b}{g \sin(2a)}}$$

Αφού το μέγεθος του b είναι σταθερό, για να έχουμε ελάχιστο χρόνο, πρέπει να έχουμε τη μέγιστη τιμή του $\sin(2a)$ που είναι 1, δηλαδή :

$$\sin(2a) = 1 \Rightarrow 2a = 90^\circ \Rightarrow \boxed{a = 45^\circ}$$

Κεφάλαιο 3: Έργο και ενέργεια

Έργο σταθερής δύναμης

Το φυσικό μέγεθος του έργου:

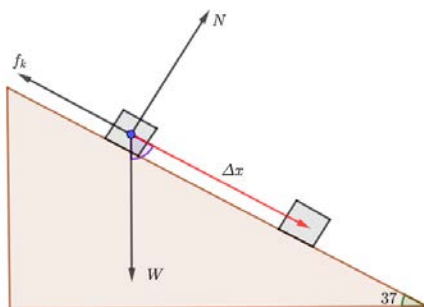
Δίνεται ένα σώμα που μετατοπίζετε κατά $\Delta\vec{x}$ και πάνω του ασκείται η σταθερή δύναμη $\vec{F}$. Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{F} \cdot \Delta\vec{x}$ ορίζεται ως το έργο της δύναμης $\vec{F}$.

Δηλαδή με πιο απλά λόγια
$$W_F = |\vec{F}| \cdot |\Delta\vec{x}| \cdot \cos\varphi$$

Όπου φ είναι η γωνιά μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{F}$ και $\Delta\vec{x}$. Η μονάδα μέτρησης του έργου είναι $N \cdot m$ και το ονομάζουμε 1 Joule (J). **Το έργο είναι μονόμετρο μέγεθος.** Το συνολικό έργο σε ένα σώμα είναι το άθροισμα των έργων όλων των δυνάμεων. Αυτό ισούται με το έργο της συνισταμένης δύναμης

Παράδειγμα 1: Δίνεται ένα σώμα μάζας 1kg που κινείται σε κεκλιμένο επίπεδο γωνιάς 37° . Εάν η κινητική τριβή στο σώμα είναι 2N και το σώμα μετατοπίζεται κατά 4m, να βρείτε το έργο του βάρους, της κάθετης δύναμης από το επίπεδο και της τριβής.

Λύση



$$W_W = |W||\Delta x| \cos(90 - 37) = 40 \times 0,6 = 24 J$$

Λέμε ότι το βάρος παράγει έργο

$$W_N = |N||\Delta x| \cos(90) = 0$$

$$W_f = |f||\Delta x| \cos(190) = 2 \times 4 \times -1 = -8J$$

Λέμε ότι η τριβή καταναλώνει έργο

Σημείωση: Εάν η γωνιά μεταξύ της δύναμης και της μετατόπισης είναι μεταξύ 0 και 90 μοίρες, το έργο της δύναμης είναι θετικό. (Αφού $\cos \varphi > 0$) . Εάν η γωνιά μεταξύ της δύναμης και της μετατόπισης είναι μεταξύ 0 και 90 μοίρες, το έργο της δύναμης έργου είναι αρνητικό. (Αφού $\cos \varphi < 0$). Επίσης εάν η δύναμη είναι κάθετη στη μετατόπιση το έργο είναι μηδενικό (Αφού $\cos \varphi = 0$)

Μία δύναμη η οποία το έργο της δεν εξαρτάται από την διαδρομή που ακολουθεί λέγεται συντηρητική και τέτοιες δυνάμεις είναι το βάρος, οι βαρυτικές δυνάμεις, οι ηλεκτροστατικές δυνάμεις και η δύναμη ελατηρίου. Οι άλλες δυνάμεις λέγονται μη-συντηρητικές.

Έργο και Κινητική Ενέργεια

Η ενέργεια, σε απλά λόγια είναι η δυνατότητα να εκτελούμε έργο. Κάθε σώμα που κινείται εκτελεί έργο, δηλαδή έχει ενέργεια. Η ενέργεια που έχει ένα σώμα λόγω της κίνησης του λέγεται η κινητική ενέργεια. Υπολογίζεται ως:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

Όπου v είναι η ταχύτητα σε m/s και το m είναι η μάζα σε kg . Η μονάδα μέτρησης του είναι 1 Joule (J)

Θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας:

Το συνολικό έργο δυνάμεων σε ένα σώμα κατά συγκεκριμένη μετατόπιση, ισούται με την μεταβολή στην κινητική ενέργεια του (κατά αυτή την μετατόπιση).

$$\text{Δηλαδή: } W_{\Sigma F} = \Delta E_k = E_{k_2} - E_{k_1}$$

Παράδειγμα 1: Ένα σώμα μάζας 2 kg κινείται από ηρεμία σε οριζόντιο έδαφος υπό την επίδραση σταθερής δύναμης F μέτρου 20 N. Εάν η κινητική τριβή στο σώμα έχει μέτρο 16N , να βρείτε την ταχύτητα του όταν έχει μετατοπισθεί κατά 10 μέτρα εάν η μετατόπιση και η δύναμη F είναι ομόρροπα.

Λύση:

Η συνισταμένη δύναμη στον κατακόρυφο άξονα είναι 0. Άρα

$$\Sigma F = \Sigma F_x = F - f_k = 4N$$

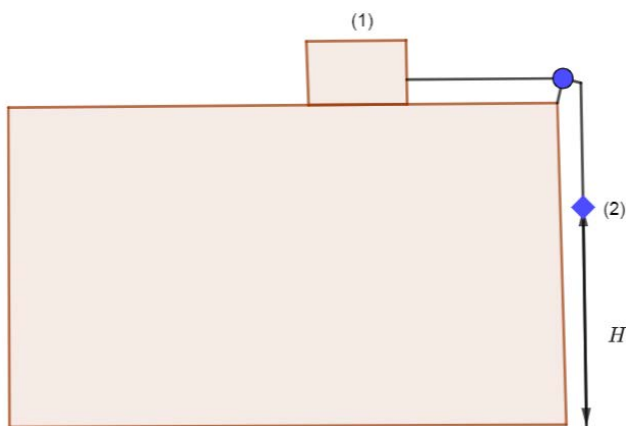
$$W_{\Sigma F} = E_{k_2} - E_{k_1} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2$$

$$\Rightarrow \Sigma F \times \Delta x = \frac{1}{2}mv_2^2$$

$$\Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{2 \times \Sigma F \times \Delta x}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 4 \times 10}{2}} = 6,3 \frac{m}{s}$$

Παράδειγμα 2:

Στο παρακάτω σύστημα τα σώματα συνδέονται με αβαρές νήμα. Ο συντελεστής κινητικής τριβής μεταξύ του σώματος (1) και της επιφάνειας είναι 0,2. Οι μάζες των σωμάτων (1) και (2) είναι 2kg και 1kg αντίστοιχα. Το σύστημα αφήνεται να κινηθεί ελευθέρα. Να βρείτε σε ποσά δευτερόλεπτα, η κινητική ενέργεια του συστήματος γίνεται 12 J.



Λύση

Στο σύστημα το βάρος του σώματος 2, κινεί το σύστημα και η τριβή στο σώμα 2 αντιστέκεται σε αυτό.

$$\text{Τώρα } f_k = \mu_k \cdot N_2 = \mu_k \cdot W_2 = 0,2 \times 2 \times 10 = 4N$$

Αρχικά η κινητική ενέργεια του συστήματος ήταν 0 (ήταν ακίνητο).

Από το θεώρημα έργου κινητικής ενέργειας:

$$W_{\Sigma F} = \Delta E_k$$

$$\Rightarrow W_{W_2} + W_{f_k} = E_k$$

$$\Rightarrow m_2 g h + f_k d \cdot \cos 180 = E_k$$

$$\Rightarrow m_2 g h - f_k d = E_k$$

Αφού τα σώματα συνδέονται, διανύουν ίσες μετατοπίσεις, δηλαδή $d = h$.

$$\Rightarrow m_2 g d - f_k d = 12$$

$$\Rightarrow 10d - 4d = 12$$

$$\Rightarrow \boxed{d = 2}$$

Τώρα η επιτάχυνση των σωμάτων είναι $a = \frac{\Sigma F}{m} = \frac{10-4}{3} = 2 \frac{m}{s^2}$

$$\text{Οπότε αφού: } \Delta x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = t^2$$

$$\Rightarrow t^2 = 2$$

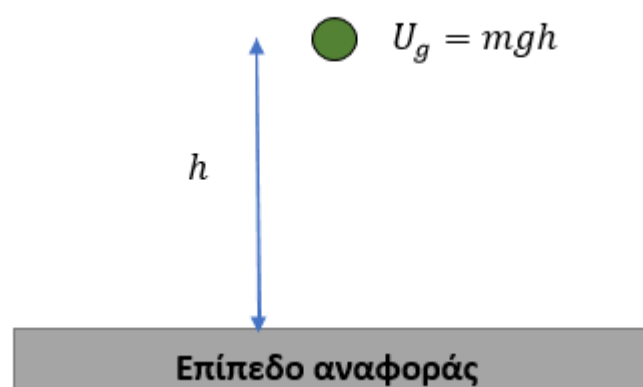
$$\Rightarrow \boxed{t = 1,4 \text{ s}}$$

Η μηχανική ενέργεια

Κάποια σώματα λόγω της θέσης, ή του σχήματος τους μπορούν να εκτελούν έργο. Αυτά τα σώματα έχουν δυναμική ενέργεια.

Υπάρχουν διαφορετικά είδη δυναμικής ενέργειας (οι συντηρητικές δυνάμεις μπορούν να συντηρούν δυναμική ενέργεια: (έχουμε βαρυτική, ελαστική και ηλεκτρική δυναμική ενέργεια) και συμβολίζονται με U .

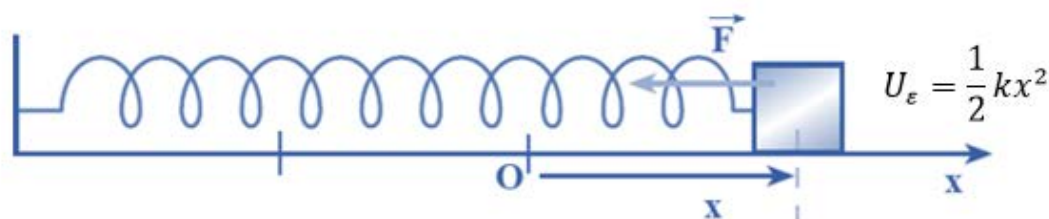
Η βαρυτική δυναμική είναι η ενέργεια που συντηρεί ένα σώμα, λόγω του ύψος του από την επιφάνεια της γης. Υπολογίζεται ως $U_g = mgh$ όπου m είναι η μάζα σε κιλά, h είναι το ύψος σε μέτρα, και g είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας.



Εάν το ύψος ενός σώματος μεταβάλλεται κατά Δh , τότε η βαρυτική δυναμική του ενέργεια μεταβάλλεται κατά $\Delta U_g = mg\Delta h$

Η δυναμική ενέργεια ελατηρίου είναι η ενέργεια που συντηρεί ένα σώμα που συνδέεται με ένα ελατήριο (λόγο της θέσης του).

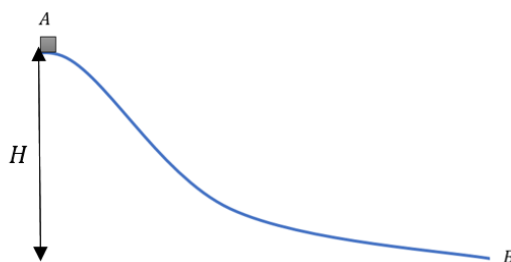
Υπολογίζεται ως $U_\epsilon = \frac{1}{2}kx^2$ όπου k είναι η σταθερά ελατηρίου σε $\frac{N}{m}$ και x η συσπίρωση ή επιμήκυνση του ελατηρίου από το φυσικό του μήκος.



Η μηχανική ενέργεια ενός σώματος είναι το άθροισμα της δυναμικής και κινητικής ενέργειας του σώματος.

Όταν ασκούνται σε ένα σώμα (ή σύστημα) δυνάμεις και από αυτές μόνο οι συντηρητικές δυνάμεις παράγουν ή καταναλώνουν έργο (οι μη-συντηρητικές δυνάμεις έχουν συνολικό μηδενικό έργο) τότε **η μηχανική ενέργεια του σώματος διατηρείται, δηλαδή παραμένει σταθερή. (Αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας)**

Παράδειγμα 1: Ένα σώμα κινείται στην παρακάτω **λεία** διαδρομή και αφήνεται από ηρεμία από το σημείο Α το οποίο βρίσκεται σε ύψος H από το έδαφος. Εάν το σώμα φτάνει στο έδαφος στο σημείο Β, να βρείτε την ταχύτητα του σε αυτό το σημείο.



Λύση

Αφού η τροχιά είναι λεία, οι μόνες δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα είναι η κάθετη δύναμη N και το βάρος. Όμως κάθε στιγμή, η δύναμη N είναι κάθετη στην μετατόπιση του σώματος, δηλαδή έχει μηδενικό έργο. Άρα η μόνη δύναμη του παράγει έργο είναι το βάρος (συντηρητική δύναμη) και συνεπώς ισχύει η αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας.

$$E_{M_A} = E_{M_B} \Rightarrow E_{k_A} + U_{g_A} = E_{k_B} + U_{g_B}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv_A^2 + mgh_A = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh_B$$

$$\xrightarrow{v_A=h_B=0} mgh_A = \frac{1}{2}mv_B^2$$

$$\Rightarrow v_B = \sqrt{2gh_A} = \sqrt{2gH}$$

Παράδειγμα 2: Ένα σώμα μάζας 500g κινείται με ταχύτητα $2 \frac{m}{s}$ σε λεία οριζόντια επιφάνεια και συγκρούεται με ελατήριο με σταθερά $200 \frac{N}{m}$. Να βρείτε τη μέγιστη συμπίεση του ελατηρίου.

Λύση

Η μηχανική ενέργεια διατηρείται αφού η μόνη δύναμη που ασκείται στο σώμα είναι η δύναμη ελατηρίου (συντηρητική δύναμη). Όταν το ελατήριο αποκτήσει τη μέγιστη συμπίεση του, τότε η ταχύτητα του σώματος μηδενίζεται. Άρα από την αρχή διατήρησης μηχανικής

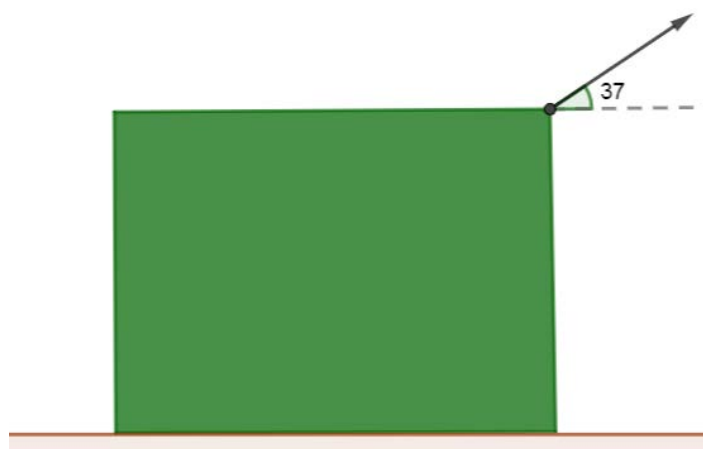
$$\text{ενέργειας: } E_{M_{\alpha\rho\chi}} = E_{M_{\tau\epsilon\lambda}} \Rightarrow E_{k_{\alpha\rho\chi}} + U_{\epsilon_{\alpha\rho\chi}} = E_{k_{\tau\epsilon\lambda}} + U_{\epsilon_{\tau\epsilon\lambda}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow mv^2 = kx^2 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{mv^2}{k}}$$

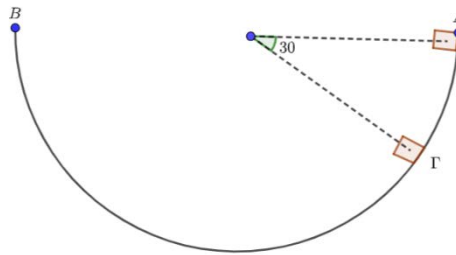
$$\Rightarrow x = \sqrt{0,5 \times \frac{2^2}{200}} = 0,1m$$

Ασκήσεις ενότητας

1. Μια μπάλα καλαθόσφαιρας αφήνεται να πέσει κάτω στο έδαφος. Κατά την κίνηση της μπάλας υπάρχει αντίσταση από τον αέρα. Να προσδιορίσετε ποιες από τις δυνάμεις που ασκούνται στην μπάλα παράγουν έργο και ποιες καταναλώνουν έργο.
2. Ένα σώμα μάζας 200g αφήνεται από ηρεμία από ύψος 80m από το έδαφος και φτάνει στο έδαφος με ταχύτητα $35 \frac{m}{s}$. Να υπολογίσετε το έργο της αντίστασης του αέρα.
3. Σώμα μάζας 800g αφήνεται από ηρεμία να πέσει από αρχικό ύψος 8m από το έδαφος. Στο έδαφος υπάρχει ένα ελατήριο με σταθερά $k = 320 \frac{N}{m}$. Να υπολογίσετε τη μέγιστη συμπίεση του ελατηρίου.
4. Τραβούμε ένα κουτί μάζας 2kg σε οριζόντια επιφάνεια με σταθερή ταχύτητα 4m/s χρησιμοποιώντας ένα τεντωμένο νήμα, όπως στο παρακάτω σχήμα. Εάν το νήμα σχηματίζει γωνιά 37° με την οριζόντια διεύθυνση κατά την διάρκεια της κίνησης και ο συντελεστής κινητικής τριβής μεταξύ του κουτιού και την επιφάνια είναι $\mu_k = 0,2$, να υπολογίσετε το έργο της τριβής καθώς και το συνολικό έργο των δυνάμεων κατά την διάρκεια των 20 δευτερόλεπτων.



5. Στο παρακάτω σχήμα έχουμε ένα λείο ημικύκλιο με διάμετρο $AB = 10\text{m}$. Ένα σώμα αφήνεται να κινηθεί από ηρεμία από το σημείο A . Το σώμα κινείται κατά μήκος τόξου 30° και φτάνει στο σημείο Γ . Να βρείτε το μέτρο της ταχύτητας του σώματος στο σημείο Γ .



Λύσεις

1.

Η αντίσταση του αέρα καταναλώνει έργο αφού είναι αντίρροπη με τη μετατόπιση (δηλαδή έχει αρνητικό έργο) και το βάρος παράγει έργο αφού είναι ομόρροπη με τη μετατόπιση (δηλαδή έχει θετικό έργο).

2.

$$\Sigma W = \Delta E_k \Rightarrow W_W + W_D = E_{k_{\tau\epsilon\lambda}} - E_{k_{\alpha\rho\chi}} = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\Rightarrow W_D = \frac{1}{2}mv^2 - W_W = \frac{1}{2}mv^2 - (mg)\Delta y \cos(0) = \frac{1}{2}mv^2 - mgh$$

$$\Rightarrow W_D = \frac{1}{2} \times 0,8 \times 35^2 - 0,8 \times 10 \times 35 = -37,5 J$$

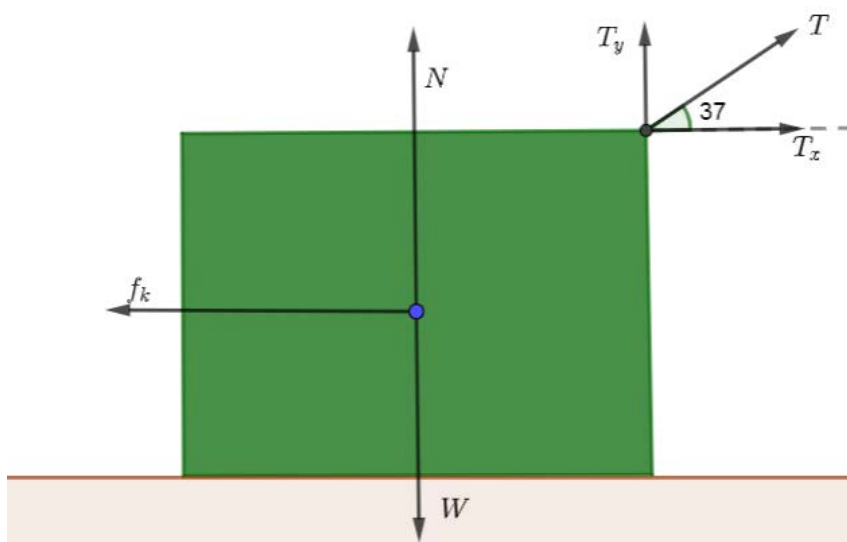
3.

Όταν το ελατήριο αποκτήσει τη μέγιστη του συσπίρωση, τότε η ταχύτητα του σώματος μηδενίζεται. Άρα από την αρχή διατήρησης μηχανικής ενέργειας:

$$E_{M_{\alpha\rho\chi}} = E_{M_{\tau\epsilon\lambda}} \Rightarrow U_{g_{\alpha\rho\chi}} + U_{\epsilon_{\alpha\rho\chi}} = U_{g_{\tau\epsilon\lambda}} + U_{\epsilon_{\tau\epsilon\lambda}}$$

$$\Rightarrow mgh = \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{2mgh}{k}} = \sqrt{\frac{2 \times 0,8 \times 8}{320}} = 0,2m$$

4.



Αναλύουμε την τάση του νήματος σε δυο συνιστώσες και γράφουμε τον πρώτο νόμο του Νεύτωνα για τις άξονες x και y ξεχωριστά.

$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \Rightarrow T_x - f_k = 0 \Rightarrow T \sin \theta - \mu_k N = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \Rightarrow T_y + N - W = 0 \Rightarrow T \cos \theta + N - mg = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} T \sin \theta - \mu_k N = 0 \\ T \mu_k \cos \theta + N \mu_k - mg \mu_k = 0 \end{cases} \Rightarrow T(\sin \theta + \mu_k \cos \theta) = mg \mu_k$$

$$\Rightarrow T = \frac{mg \mu_k}{\sin \theta + \mu_k \cos \theta}$$

$$W_T = T \Delta x \sin \theta = \frac{mg \mu_k \sin \theta}{\sin \theta + \mu_k \cos \theta} \times v \Delta t, \text{ αφού } v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$W_T = \frac{mg \mu_k \sin \theta}{\sin \theta + \mu_k \cos \theta} \times v \Delta t = \frac{2 \times 10 \times 0,2 \times \sin 37^\circ \cdot 3.19}{\sin 37^\circ + 0,2 \times \cos 37^\circ \cdot 0.92} \times 20 \times 5$$

$$\Rightarrow W_T = 347 \text{ J}$$

Από τον πρώτο νόμο του Νεύτωνα, έχουμε:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow \Sigma W = W_{\Sigma F} = \Sigma F \times \Delta x \times \sin \omega = 0$$

Γενικά όταν σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα, τότε το συνολικό έργο δυνάμεων είναι μηδενικό.

5.

Η μόνη δύναμη που παράγει/καταναλώνει έργο είναι το βάρος. Άρα από την αρχή διατήρηση της μηχανικής ενέργειας, έχουμε:

$$E_{m_A} = E_{m_\Gamma} \Rightarrow \frac{1}{2} m v_A^2 + m g h_A = \frac{1}{2} m v_\Gamma^2 + m g h_\Gamma$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} v_A^2 + g h_A = \frac{1}{2} v_\Gamma^2 + g h_\Gamma$$

Αλλά από τριγωνομετρία έχουμε (βλέπετε το σχήμα)

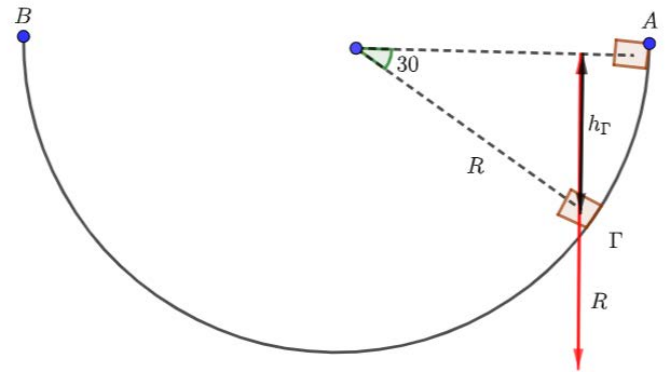
$$\sin 30 = \frac{R - h_{\Gamma}}{R} \Rightarrow h_{\Gamma} = \frac{1}{2}R$$

Επίσης έχουμε $h_A = R$ και $v_A = 0$

$$\text{Άρα } gR = \frac{1}{2}v_{\Gamma}^2 + \frac{1}{2}gR$$

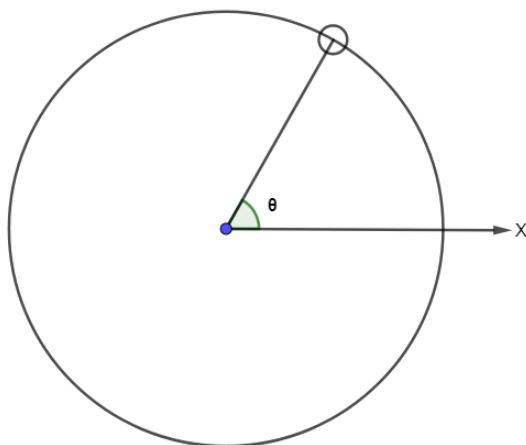
$$\Rightarrow gR = v_{\Gamma}^2 \Rightarrow v_{\Gamma} = \sqrt{gR}$$

$$\Rightarrow v_{\Gamma} = \sqrt{50} = 7,1 \frac{m}{s}$$



Κεφάλαιο 4: Κυκλική κίνηση

Η κυκλική κίνηση είναι η κίνηση ενός σώματος σε κυκλική διαδρομή. Η **γωνιακή θέση** του σώματος σε τέτοια διαδρομή καθορίζεται από την γωνιά θ σε σχέση με ένα άξονα και έχει μονάδα μέτρησης το 1 rad.



Η **γωνιακή μετατόπιση** ορίζεται ως $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$, όπου θ_1 και θ_2 είναι γωνιακές θέσεις.

Η **μέση γωνιακή ταχύτητα** ορίζεται ως $\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ και έχει μονάδα μέτρησης rad/s στο SI

Η **στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα** ορίζεται, όπως την στιγμιαία ταχύτητα ως $\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{\omega} = \frac{d\theta}{dt}$

Προσοχή 1: Όλες τις γωνιές στις παραπάνω σχέσεις πρέπει να είναι σε rad

Όταν ένα σώμα έχει σταθερή γωνιακή ταχύτητα, τότε λέμε η κίνηση του είναι ομαλή κυκλική.

Η εξίσωση γωνιακής θέσης- χρόνου σε μια τέτοια κίνηση είναι

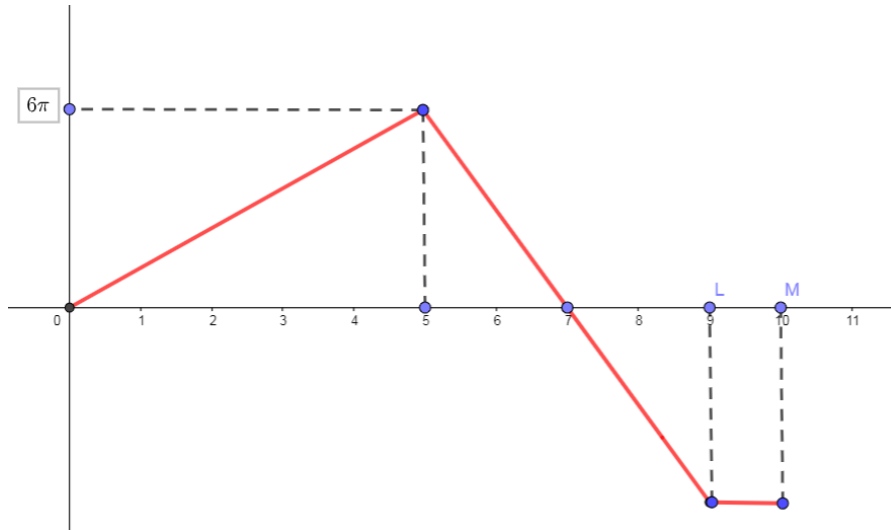
$$\Delta\theta = \omega\Delta t \Rightarrow \theta - \theta_0 = \omega t \Rightarrow \theta = \theta_0 + \omega t$$

Όταν ένα σώμα ολοκληρώνει μια περιστροφή ή γωνιακή του μετατόπιση $\Delta\theta$ είναι 2π rad.

Η γωνιακή θέση και γωνιακή μετατόπιση δεν εξαρτώνται από την ακτίνα της διαδρομής. Εξαρτώνται μόνο από την γωνιά σε σχέση με σταθερό άξονα.

Ασκήσεις για εξάσκηση

1. Ένα σώμα κινείται στον επίπεδο xOy σε κυκλική τροχιά κέντρου O . Κινείται από το σημείο A με διάνυσμα θέσης $r_A = 2i + 2j$ στο σημείο B με διάνυσμα θέσης $r_B = -2i + 2j$ σε 2 δευτερόλεπτα. Να βρεθεί η ελάχιστη γωνιακή ταχύτητα του σώματος.
2. Το παρακάτω σχήμα δείχνει την γραφική παράσταση γωνιακής θέσης- χρόνου ενός σώματος που κινείται σε κυκλική τροχαλία.



- i. Να προσδιορίσετε πόσες περιστροφές έχει ολοκληρώσει το σώμα στα πρώτα 5 δευτερόλεπτα της κίνησης του.
- ii. Να βρείτε η μέση γωνιακή ταχύτητα του σώματος στα παρακάτω χρονικά διαστήματα:
 0 έως 5 s , 5 s έως 9 s και 9 s έως 10 s

Λύσεις

1. Καταρχάς για το διάνυσμα $\vec{r}_A$ έχουμε

$$\tan\theta = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \text{ είναι η γωνιά που σχηματίζει με τον άξονα } x.$$

Ομοίως για το διάνυσμα $\vec{r}_B$ έχουμε

$$\tan\theta = \frac{2}{-2} = -1 \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{4} \text{ είναι η γωνιά που σχηματίζει με τον άξονα } x.$$

Οπότε $\Delta\theta = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$ είναι η γωνιακή μετατόπιση της κινητήρας. Άρα η μέση γωνιακή ταχύτητα είναι:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{4} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

2.

- i. Σε κάθε περιστροφή η γωνιακή μετατόπιση είναι $2\pi \text{ rad}$. Όμως στα πρώτα 5 δευτερόλεπτα της κίνησής του η γωνιακή μετατόπιση είναι $6\pi \text{ rad}$.

Άρα λογικά το σώμα έχει ολοκληρώσει $\frac{6\pi}{2\pi} = 3$ περιστροφές.

- ii. Θα υπολογίσουμε τη μέση γωνιακή ταχύτητα του σώματος σε κάθε χρονικό διάστημα ξεχωριστά.

$$0 \text{ έως } 5 \text{ s: } \omega_1 = \frac{\Delta\theta_1}{\Delta t_1} = \frac{6\pi \text{ rad}}{5 \text{ s}}$$

$$5 \text{ s έως } 9 \text{ s: } \omega_2 = \frac{\Delta\theta_2}{\Delta t_2} = -\frac{12\pi}{4} = -3\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$9 \text{ s έως } 10 \text{ s: } \omega_3 = \frac{\Delta\theta_3}{\Delta t_3} = \frac{0}{1} = 0$$

Κυκλική κίνηση: Μια περιοδική κίνηση

Μια κίνηση ονομάζεται περιοδική εάν η κίνηση επαναλαμβάνεται σε ίσα χρονικά διαστήματα. Ο χρόνος που απαιτείται για ένα σώμα για να ολοκληρώσει μια περιστροφή ονομάζεται **περίοδος** και συμβολίζεται με T .

Στην κυκλική κίνηση αφού η γωνιακή ταχύτητα δίνεται από:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$$

Εάν ένα σώμα ολοκληρώσει n κύκλους σε χρονικό διάστημα t τότε

$$\boxed{n = \frac{t}{T}}$$

Ο αριθμός των περιστροφών που ολοκληρώνει το σώμα σε 1 δευτερόλεπτο ονομάζεται **συχνότητα**, συμβολίζεται με f , έχει μονάδα μέτρησης το 1 Hertz (Hz) και υπολογίζεται χρησιμοποιώντας

τον τύπο $\boxed{f = \frac{1}{T}}$

Η γραμμική ταχύτητα και επιτάχυνση

Η γραμμική μετατόπιση του σώματος είναι η μετατόπιση του στο επίπεδο.

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

Έτσι και η γραμμική ταχύτητα ορίζεται ως $\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$.

Και η στιγμιαία γραμμική ταχύτητα ορίζεται ως $v = \frac{ds}{dt}$

Όπου ds είναι η μήκος του τόξου που έχει διανύσει.

Επίσης υπολογίζεται ως $v = r\omega$ όπου η ω είναι η γωνιακή ταχύτητα και r είναι η ακτίνα της διαδρομής.

Η κατεύθυνση της γραμμικής ταχύτητας ενός σώματος που κινείται σε κυκλική τροχαία είναι πάντα εφαπτόμενη στην τροχαία.

Θα μελετήσουμε ένα παράδειγμα: Δίνεται ένας δίσκος πάνω στον οποίο τοποθετούμε δύο μπάλες. Ο δίσκος περιστρέφεται γύρω από το σημείο O . Εάν ο δίσκος περιστρέφεται μια φορά, η δυο μπάλες έχουν περιστρέψει $2\pi \text{ rad}$. Άρα η γωνιακή τους μετατόπιση είναι ίση σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα. Άρα και οι γωνιακές τους ταχύτητες είναι ίσες. Αλλά αφού για την μπάλα A η ακτίνα της τροχιάς είναι μεγαλύτερη, διανύει μεγαλύτερη απόσταση σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα, δηλαδή η μπάλα A είναι πιο γρήγορη (έχει μεγαλύτερη γραμμική ταχύτητα). Στα μαθηματικά:

$$\begin{cases} \Delta\theta_A = \Delta\theta_B \Rightarrow \frac{\Delta\theta_A}{\Delta t} = \frac{\Delta\theta_B}{\Delta t} \Rightarrow \omega_A = \omega_B \\ v = r\omega \xrightarrow{\omega_A=\omega_B} \frac{v_A}{v_B} = \frac{r_A}{r_B} \xrightarrow{r_A > r_B} v_A > v_B \end{cases}$$

Παράδειγμα 1: Ένα αυτοκίνητο που κινείται σε κυκλικό κόμβο ακτίνας 200 μέτρων, διανύει 9° του κυκλικού τόξου κάθε δευτερόλεπτο. Να βρείτε πιο αριθμό θα δείχνει το ταχύμετρο του αυτοκινήτου σε km/h .

Λύση:

Η γωνιακή μετατόπιση του αυτοκινήτου στην μονάδα χρόνου είναι:

$$9^\circ = \frac{\pi}{20} \text{ rad}, \text{ δηλαδή η γωνιακή του ταχύτητα είναι } \frac{\pi}{20} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\text{Όμως } v = r\omega = \frac{\pi}{20} \times 200 = 31.4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 113 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Η επιτάχυνση στην κυκλική κίνηση

Στην κυκλική κίνηση, εάν η ταχύτητά ενός σώματος αλλάζει πάντα, τότε έχει μία επιτάχυνση που ορίζεται ως επιτρόχιος επιτάχυνση (a_ε). Έχει την ίδια διεύθυνση με την ταχύτητα. Αλλά αφού η διεύθυνση της ταχύτητας αλλάζει, τότε έχουμε κεντρομόλο επιτάχυνση (a_c) που είναι κάθετη στην ταχύτητα του. Έχει κατεύθυνση ως προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς.

Η συνολική επιτάχυνση του σώματος υπολογίζεται ως $\vec{a} = \vec{a}_\varepsilon + \vec{a}_c$

Δηλαδή το μέτρο της είναι $|\vec{a}| = \sqrt{|\vec{a}_\epsilon|^2 + |\vec{a}_c|^2}$

Επίσης το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης υπολογίζεται με 2 τρόπους ως

$$\boxed{a_c = \frac{v^2}{r}} \quad \text{και} \quad \boxed{a_c = r\omega^2}$$

Παράδειγμα 2: Ένα σώμα εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση. Εάν η γωνιακή ταχύτητα του σώματος είναι ω και η γραμμική ταχύτητα του είναι v , να βρείτε το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης συναρτήσει του ω και v

Λύση:

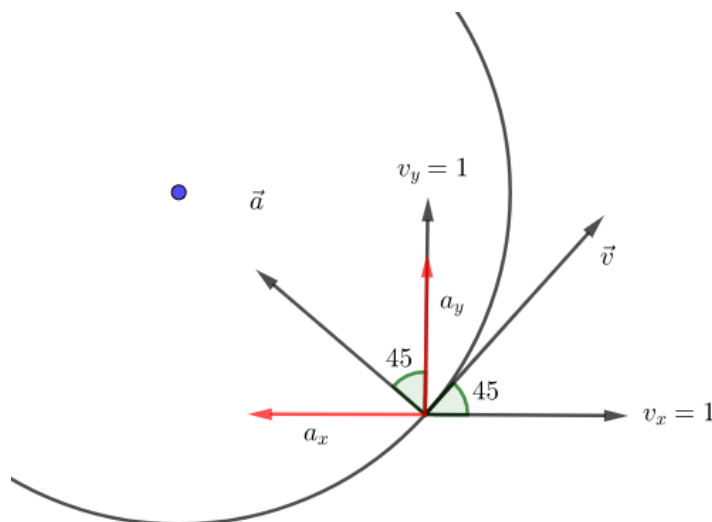
$$a_c = r\omega^2$$

$$\text{Όμως } v = \omega r \Rightarrow r = \frac{v}{\omega} \Rightarrow a_c = \frac{v}{\omega} \omega^2 \Rightarrow \boxed{a_c = \omega v}$$

Παράδειγμα 3: Ένα σώμα κινείται σε κυκλική διαδρομή (ακτίνας 1 μέτρου) και σε μία στιγμή η εξίσωση γραμμικής ταχύτητας του είναι $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$. Να δείξετε ότι η εξίσωση επιτάχυνσης (κεντρομόλος) του την ίδια στιγμή είναι $\vec{a} = -\vec{i}\sqrt{2} + \vec{j}\sqrt{2}$.

Λύση:

$$\left\{ \begin{array}{l} |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \text{ m/s} \\ |\vec{a}_c| = \frac{v^2}{r} \end{array} \right. \Rightarrow |\vec{a}_c| = \frac{\sqrt{2}^2}{1} = 2 \text{ m/s}^2$$



Χρησιμοποιώντας το παραπάνω σχήμα έχουμε ότι $\tan 45 = \frac{|a_y|}{|a_x|}$

$$\Rightarrow |a_y| = |a_x|$$

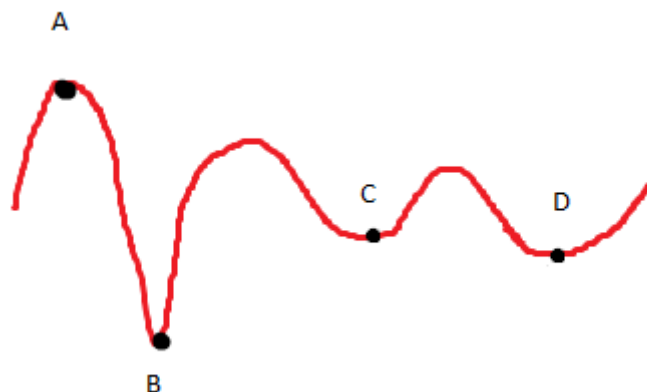
$$\text{Επίσης } |a_c| = \sqrt{|a_y|^2 + |a_x|^2} = \sqrt{2} \Rightarrow |a_y| = |a_x| = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\text{Αφού } a_x < 0 \Rightarrow a_x = -\sqrt{2} \text{ m/s}^2$$

$$\text{Άρα } \vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} = -\vec{i}\sqrt{2} + \vec{j}\sqrt{2}.$$

Ασκήσεις για εξάσκηση

1. Δυο σώματα A και B μάζας m και 2m αντίστοιχα, κινούνται ομαλά σε δυο ομοκεντρικές κυκλικές τροχιές. Εάν η ακτίνα περιστροφής του σώματος A είναι διπλάσια από του B, και τα σώματα έχουν την ίδια κινητική ενέργεια, να βρεθεί ο λόγος $\frac{a_A}{a_B}$, όπου a_A και a_B είναι τα μέτρα των κεντρομόλων επιταχύνσεων των σωμάτων αντίστοιχα.
2. Ένα σωματίδιο εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση με γωνιακή ταχύτητα $\omega = \frac{\pi \text{ rad}}{2 \text{ s}}$ στο επίπεδο xOy , με αριστερόστροφη φορά. Εάν κάποια στιγμή η επιτάχυνση του σωματιδίου είναι $\vec{a} = 2\vec{i} - 2\vec{j}$, να βρεθεί η επιτάχυνση του 1,5 s μετά από αυτή τη στιγμή.
3. Ένα αυτοκίνητο κινείται με ταχύτητα σταθερού μέτρου, στη παρακάτω διαδρομή. Σε ποιο σημείο (A,B,C ή D) έχει την μεγαλύτερη επιτάχυνση;
(Ολυμπιάδα Φυσικής Περσίας- 1998)



Λύσεις

1. Από τον τύπο της κινητικής ενέργειας:

$$E_{k_A} = E_{k_B} \Rightarrow \frac{1}{2} m_A v_A^2 = \frac{1}{2} m_B v_B^2 \Rightarrow \left(\frac{v_A}{v_B} \right)^2 = \frac{m_B}{m_A} = \frac{2m}{m} = 2$$

Όμως η κεντρομόλος επιτάχυνση είναι:

$$a = \frac{v^2}{r} \Rightarrow \frac{a_A}{a_B} = \frac{v_B^2}{v_A^2} \times \frac{r_B}{r_A} = \left(\frac{v_A}{v_B} \right)^2 \times \frac{r_B}{2r_B} = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

$$\Rightarrow a_A = a_B$$

Άρα τα δυο σώματα έχουν την ίδια κεντρομόλος επιτάχυνση.

2. Η κεντρομόλος επιτάχυνση είναι πάντα προς το κέντρο του κύκλου, οπότε τη δεδομένη στιγμή η κεντρομόλος επιτάχυνση του σωματιδίου βρίσκεται στο 2^ο τεταρτημόριο του τριγωνομετρικού κύκλου και σχηματίζει γωνιά : $\tan \theta = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$ με τον οριζόντιο άξονα. Όμως:

$$\Delta \theta = \omega \Delta t = \frac{\pi}{2} \times 1,5 = \frac{3\pi}{4} \text{ rad}$$

Οπότε σε 1,5 δευτερόλεπτα, μετατοπίζεται κατά $\frac{3\pi}{4} \text{ rad}$, και θα βρίσκεται πάνω στον κατακόρυφο άξονα. Όμως η ακτίνα της διαδρομής είναι σταθερή, και το σωματίδιο εκτελεί κυκλική κίνηση, δηλαδή η επιτάχυνση έχει σταθερό μέτρο

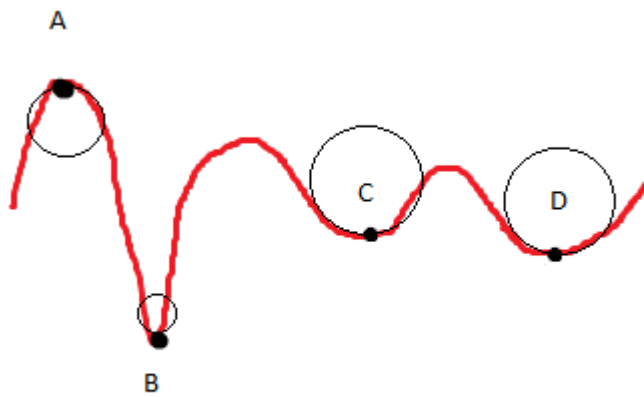
$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \frac{m}{s^2}$$

$$\text{Άρα αυτή τη στιγμή } \vec{a} = 2\sqrt{2} \hat{j}$$

3. Αφού το μέτρο της ταχύτητας είναι σταθερό, η μόνη επιτάχυνση που υπάρχει είναι η κεντρομόλος επιτάχυνση και υπολογίζεται ως

$$a = \frac{v^2}{r}$$

Για να μεγαλώνεται η επιτάχυνση, πρέπει να έχουμε μικρότερη ακτίνα.



Η στροφή B έχει την μικρότερη ακτίνα. Άρα η απάντηση είναι B

Η κεντρομόλος δύναμη

Εάν ένα σώμα κινείται σε κυκλική διαδρομή, αφού πάντα έχει επιτάχυνση (κεντρομόλος επιτάχυνση) τότε ασκείται και μια δύναμη πάνω στο σώμα. Αυτή η δύναμη είναι η κεντρομόλος δύναμη και έχει τη ίδια φορά με την επιτάχυνση (ως προς το κέντρο της διαδρομής)

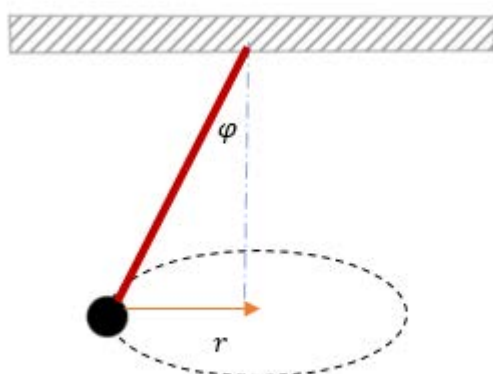
Άρα χρησιμοποιώντας το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα έχουμε

$$F = ma \Rightarrow F_c = ma_c$$

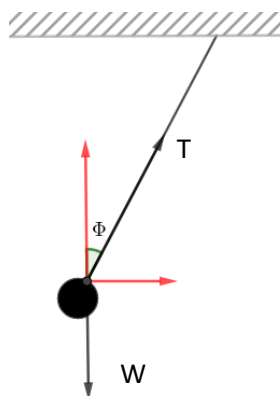
$$\Rightarrow F_c = \frac{mv^2}{r} \text{ και } F_c = mr\omega^2$$

Προσοχή 2: Σε ένα σώμα που κινείται σε κυκλική διαδρομή, η κεντρομόλος δύναμη μπορεί να είναι οποιαδήποτε δύναμη (ή συνιστώσα δύναμης) αντίστοιχα με την κατάσταση του (Τάση του νήματος, δύναμη ελατηρίου, τριβή κ.τ.λ.)

Παράδειγμα 1 (Κωνικό εκκρεμές): Στο παρακάτω σχήμα υπάρχει ένα σώμα μάζας m , συνδεδεμένο με ένα νήμα (από την οροφή) που κινείται ομαλά σε κυκλική διαδρομή ακτίνας r . Να υπολογίσετε την γωνιά ϕ που σχηματίζει το νήμα με τον κατακόρυφο άξονα συναρτήσει της γραμμικής ταχύτητας του σώματος και της ακτίνας r .



Λύση: Αναλύουμε την τάση του νήματος σε δύο συνιστώσες.



Από τον πρώτο νόμο του Νεύτωνα έχουμε $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow |T_y| = mg$

Σε αυτό το πρόβλημα, η συνιστώσα της τάσης T_x είναι η κεντρομόλος δύναμη (δεν υπάρχει άλλη δύναμη ή συνιστώσα στον άξονα X)

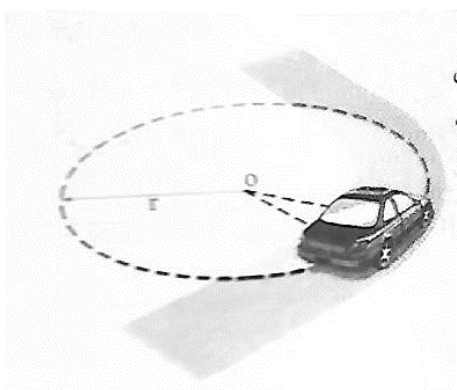
$$\text{Άρα } |T_x| = F_c = \frac{mv^2}{r}$$

Για να βρούμε την κατεύθυνση, έχουμε: $\frac{|T_x|}{|T_y|} = \tan\varphi \Rightarrow \tan\varphi = \frac{v^2}{rg}$

$$\Rightarrow \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{v^2}{rg}\right)$$

Παράδειγμα 2: Ένα αυτοκίνητο μάζας m κινείται σε μια στροφή ακτίνας R . Εάν ο συντελεστής τριβής μεταξύ του αυτοκινήτου και του δρόμου είναι μ , να βρείτε τη μέγιστη ταχύτητα με την οποία το αυτοκίνητο μπορεί να κινείται με ασφάλεια.

Λύση



Από τον πρώτο νόμο του Νεύτωνα

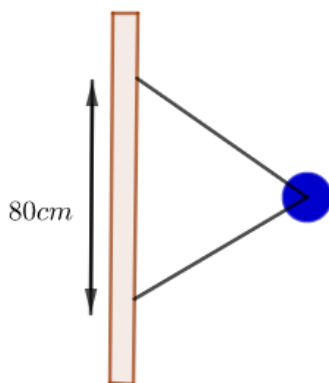
$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow |N| = |W| \Rightarrow |N| = mg$$

Η κεντρομόλος δύναμη είναι η στατική τριβή. Άρα:

$$\Rightarrow F_c = f_s \leq f_{s_{max}} \Rightarrow \frac{mv^2}{r} \leq \mu N \xrightarrow{N=mg} \frac{mv^2}{r} \leq \mu mg$$

$$\Rightarrow v^2 \leq \mu rg \Rightarrow v \leq \sqrt{\mu rg}$$

Παράδειγμα 3: Στο παρακάτω σχήμα ένα σώμα μάζας ενός κιλού, συνδέεται χρησιμοποιώντας δύο αβαρή νήματα (μήκους $L=50\text{ cm}$ το καθένα) με μια ράβδο. Η απόσταση μεταξύ των άκρων των νημάτων είναι 80 cm . Εάν η ράβδος περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα 10 rad/s , να υπολογίσετε τις τάσεις των νημάτων.



Λύση

Στο σώμα ασκούνται 3 δυνάμεις (το βάρος, τάση του νήματος 1, τάση του νήματος 2.)

$$\text{Από τριγωνομετρία ξέρουμε } \cos\varphi = \frac{\frac{AB}{2}}{L} = \frac{40}{50} = 0,8$$

$$\sin\varphi = \sqrt{1 - \cos^2\varphi} = 0,6 \text{ και } r = L\sin\varphi = 30\text{ cm} = 0,3\text{ m}$$

Από πρώτο νόμο του Νεύτωνα έχουμε $\Sigma F_y = 0$

$$\Rightarrow T_{1y} - T_{2y} - mg = 0$$

$$\Rightarrow |T_1| \cos \varphi - |T_2| \cos \varphi = mg$$

$$\Rightarrow 0,8(|T_1| - |T_2|) = 10$$

$$\Rightarrow |T_1| - |T_2| = 12,5$$

Το σώμα κινείται κυκλικά, και η κεντρομόλος δύναμη είναι η συνισταμένη δύναμη στον άξονα x

$$\Sigma F_x = mr\omega^2 \Rightarrow T_{1x} + T_{2x} = mr\omega^2$$

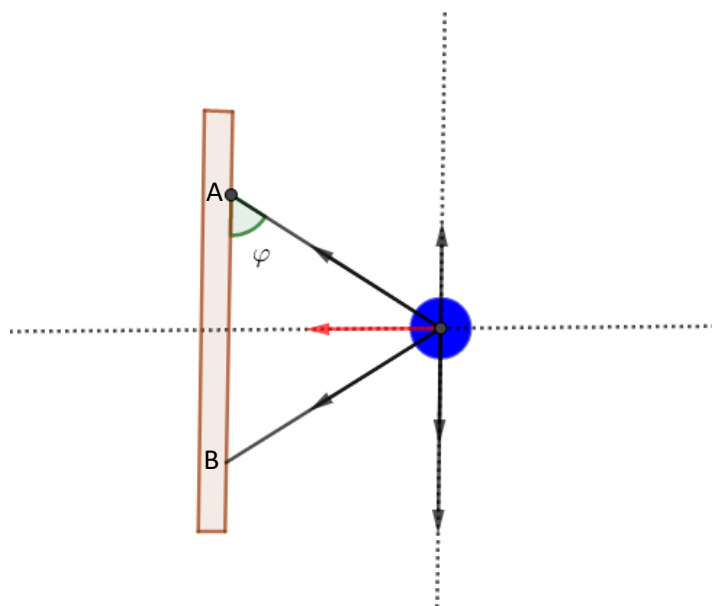
$$\Rightarrow \sin \varphi (|T_1| + |T_2|) = mr\omega^2$$

$$\Rightarrow |T_1| + |T_2| = \frac{mr\omega^2}{\sin \varphi} = \frac{0,3 \times 10^2}{0,6} = 50 \text{ N}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |T_1| + |T_2| = 50 \\ |T_1| - |T_2| = 12,5 \end{cases} \Rightarrow 2|T_1| = 62,5 \Rightarrow |T_1| = 31,25$$

$$\Rightarrow |T_2| = 18,75 \text{ N}$$

Άρα $|T_1| = 31,25 \text{ N}$ και $|T_2| = 18,75 \text{ N}$



Παράδειγμα 4: Όταν ένα αεροπλάνο θέλει να στρίψει, γυρίζει τα φτερά του ώστε να σχηματίζουν γωνιά θ με τον οριζόντιο άξονα. Έτσι η άντωση που είναι κάθετη στα φτερά του αεροπλάνου, βοηθά το αεροπλάνο να στρίψει. Να υπολογίσετε την ακτίνα της στροφής συναρτήσει της γραμμικής ταχύτητας του αεροπλάνου και της γωνιάς θ . **Άντωση (Lift) είναι η συνιστώσα της δύναμης που δρα σε ένα σώμα από ένα ρευστό, σε διεύθυνση κάθετη στην κίνηση του.**

Λύση

Αναλύουμε την άντωση L σε 2 κάθετες συνιστώσες. Από τον πρώτο νόμο του Νεύτωνα, έχουμε:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow L_y = W \Rightarrow |L| \cos \theta = mg \Rightarrow |L| = \frac{mg}{\cos \theta}$$

Η συνισταμένη των δυνάμεων στον άξονα x είναι η κεντρομόλος δύναμη.

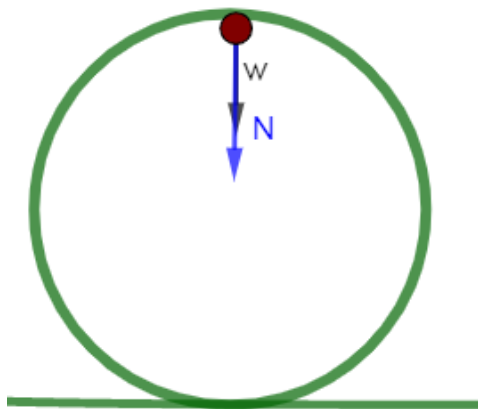
$$\Sigma F_x = F_c \Rightarrow L_x = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow |L| \sin \theta = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow \frac{mg \sin \theta}{\cos \theta} = \frac{mv^2}{r}$$

$$\Rightarrow g \tan \theta = \frac{v^2}{r} \Rightarrow \boxed{r = \frac{v^2}{g \tan \theta}}$$

Παράδειγμα 5: Δίνεται η παρακάτω λεία τροχιά, στην οποία αφήνεται ένα σώμα ελεύθερα από το σημείο A (που βρίσκεται σε ύψος H από το έδαφος. Να υπολογιστεί η ελάχιστη τιμή του ύψους H (συναρτήσει του r) έτσι ώστε το σώμα μπορεί να ολοκληρώσει μια περιστροφή στην κυκλική τροχιά.



Λύση



Έστω ότι το σώμα ολοκληρώνει μια περιστροφή στην κυκλική τροχιά. Όταν το σώμα φτάνει στο ανώτατο σημείο της κυκλικής τροχιάς, η συνισταμένη των δυνάμεων στον άξονα ψ είναι ο κεντρομόλος δύναμη.

$$\Sigma F_y = F_c \Rightarrow N + W = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow N = \frac{mv^2}{r} - mg$$

Το σώμα αφού ολοκληρώνει την κυκλική τροχιά, πρέπει να μην χάνει επαφή με την τροχιά. Άρα πρέπει η κάθετη δύναμη να είναι ομόρροπη με το βάρος. Δηλαδή $N \geq 0$

$$\Rightarrow \frac{mv^2}{r} - mg \geq 0 \xRightarrow{m \geq 0} \frac{v^2}{r} \geq g \Rightarrow v \geq \sqrt{rg}$$

Όμως από την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας:

$$E_{M_{αρχ}} = E_{M_{τελ}} \Rightarrow mgH = mg(2r) + \frac{1}{2}mv^2$$

$$\Rightarrow gH = 2gr + \frac{1}{2}v^2$$

$$v \geq \sqrt{rg} \Rightarrow v^2 \geq rg$$

$$\Rightarrow gH \geq 2gr + \frac{1}{2}rg = \frac{5}{2}rg$$

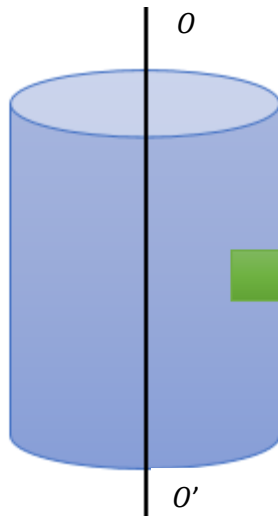
$$\Rightarrow H \geq \frac{5}{2}r$$

$$\Rightarrow \boxed{H_{min} = \frac{5}{2}r}$$

Ασκήσεις για εξάσκηση

1. Να βρεθεί η γραμμική ταχύτητα με την οποία η οποία η Σελήνη περιστρέφεται γύρω από τον πλανήτη Γη (υποθέτοντας ότι η μόνη δύναμη που ασκείται πάνω στην Σελήνη είναι η δύναμη έλξης και η τροχιά περιστροφής της Σελήνης είναι κυκλική.)
Δίνεται απόσταση Σελήνης- Γης= 384400 km και
Μάζα της Γης= $6 \times 10^{24} \text{ kg}$
2. Ένας κύλινδρος με ακτίνα r περιστρέφεται γύρω από τον κατακόρυφο άξονα OO' που περνά από τα κέντρα των βάσεων του κυλίνδρου. Να βρείτε πόση πρέπει να είναι η γωνιακή ταχύτητα του κυλίνδρου, έτσι ώστε το σώμα που είναι σε επαφή με τον κύλινδρο (όπως στο σχήμα) να μένει ακίνητο σε σχέση με

τον κύλινδρο. Ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ του σώματος και του κυλίνδρου είναι μ .



3. Ένας μοτοσικλετιστής κινείται σε κυκλικό κόμβο ακτίνας 10m , με σταθερή ταχύτητα 5 m/s . Εάν η μάζα της μοτοσυκλέτας και του μοτοσικλετιστή είναι συνολικά 100 κιλά , να βρείτε το μέτρο της δύναμης που **ασκεί το έδαφος στη μοτοσυκλέτα**.

Λύσεις

1.

Η δύναμη έλξης είναι η κεντρομόλος δύναμη στην κυκλική κίνηση.

$$F_g = F_c \Rightarrow \frac{Gm_\Sigma m_\Gamma}{r^2} = \frac{m_\Sigma v^2}{r}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM_\Gamma}{r}} = \sqrt{\frac{6,7 \times 10^{-11} \times 6 \times 10^{24}}{384400 \times 10^3}} = 1023 \frac{m}{s}$$

2.

Το σώμα ισορροπεί στον κατακόρυφο άξονα. Άρα από τον πρώτο νόμο του Νεύτωνα,

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow f_s = W \Rightarrow \mu N = mg \Rightarrow N = \frac{mg}{\mu}$$

Επίσης η κάθετη δύναμη N είναι η κεντρομόλος δύναμη, δηλαδή

$$N = mr\omega^2 \Rightarrow \frac{mg}{\mu} = mr\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{\mu r}}$$

3.

Έστω ότι ο μοτοσικλετιστής και η μοτοσυκλέτα είναι ένα σύστημα.

Το έδαφος ασκεί δυο δυνάμεις στο σύστημα: την κάθετη δύναμη και τη στατική τριβή μεταξύ της επιφάνειας του κυκλικού κόμβου και των ελαστικών.

Η τριβή είναι η κεντρομόλος δύναμη, δηλαδή:

$$f_s = \frac{mv^2}{r} = \frac{100 \times 5^2}{10} = 250 \text{ Newton}$$

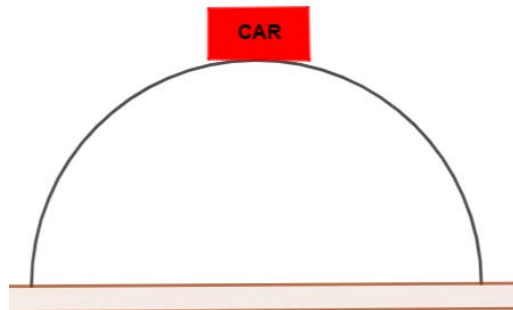
Επίσης η καθετή δύναμη υπολογίζεται από τον πρώτο νόμο του Νεύτωνα ως εξής:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N - mg = 0 \Rightarrow N = mg = 100 \times 10 = 1000 \text{ Newton}$$

$$\Rightarrow |R| = \sqrt{N^2 + f_s^2} = \sqrt{1000^2 + 250^2} = 1031 \text{ Newton}$$

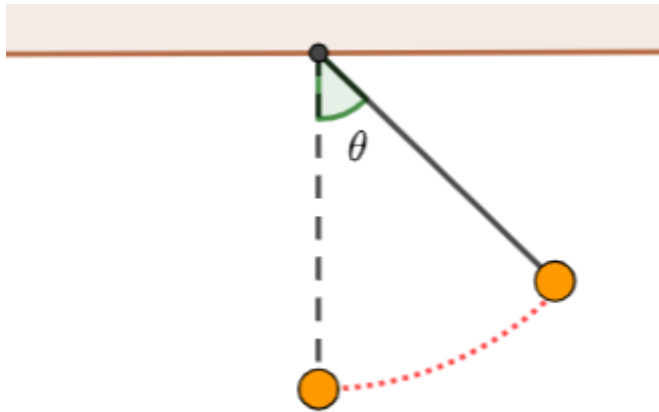
Ασκήσεις ενότητας

1. Ένας δορυφόρος περιστρέφεται 12 φορές γύρω από την Γη σε 30 μέρες. Να υπολογίσετε την γωνιακή ταχύτητα του δορυφόρου.
2. Να βρείτε τη γωνιακή ταχύτητα του λεπτοδείκτη ενός ρολογιού.
3. Ένας ανεμιστήρας περιστρέφεται με σταθερή συχνότητα 5 Hz. Εάν τα άκρα των πτερυγίων απέχουν 40 cm από το κέντρο του ανεμιστήρα, να υπολογίσετε τη κεντρομόλο επιτάχυνση των άκρων κάθε πτερύγιου
4. Ένα αυτοκίνητο μάζας m περνά πάνω από μια ημικυκλική γέφυρα ακτίνας R με ταχύτητα σταθερού μέτρου όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Να υπολογίσετε το μέτρο της δύναμης που ασκεί η γέφυρα στο αυτοκίνητο συναρτήσει της μάζας του αυτοκινήτου, της ταχύτητας του αυτοκινήτου και της ακτίνας R .



5. Ένα παιδί τοποθετεί το σβηστήρι του πάνω σε ένα κυκλικό τραπέζι το οποίο περιστρέφεται γύρω από το κέντρο του. Εάν το σβηστήρι τοποθετείται σε απόσταση r από το κέντρο του τραπεζιού, να βρείτε τη μέγιστη συχνότητα με την οποία πρέπει να περιστρέφεται το τραπέζι έτσι ώστε το σβηστήρι να μην ολισθαίνει. Να δώσετε την απάντησή σας συναρτήσει του συντελεστής στατικής τριβής μ_s (μεταξύ του τραπεζιού και του σβηστηριού), και της απόστασης r .

6. Μια βαριά λάμπα μάζας 2 κιλών ενώνεται με την οροφή χρησιμοποιώντας ένα καλώδιο μήκους L . Τραβούμε τη λάμπα προς τα δεξιά έτσι ώστε να σχηματίζει γωνιά θ με τον κατακόρυφο άξονα και την αφήνουμε να κινηθεί ελεύθερα. Εάν η μέγιστη δύναμη που μπορεί να αντέξει το καλώδιο είναι 36N, να βρείτε τη μέγιστη τιμή της γωνιάς θ , έτσι ώστε το νήμα να μην κόβεται.



7. Δυο σώματα μάζας m_1 και m_2 κινούνται σε κυκλικές τροχιές με ακτίνες R_1 και R_2 και περιόδους T_1 και T_2 αντίστοιχα, υπό την επίδραση κεντρομόλου δύναμη ιδίου μέτρου. Να δείξετε ότι:

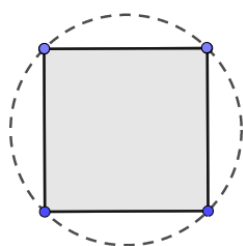
$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{m_1 R_1}{m_2 R_2}}$$

8. Ένα σώμα συνδέεται με αβαρές νήμα μήκους L και περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο. Εάν στο κατώτατο σημείο της τροχιάς η τάση του νήματος είναι τριπλάσια του βάρους, να υπολογίσετε την ταχύτητα του σε αυτό το σημείο.

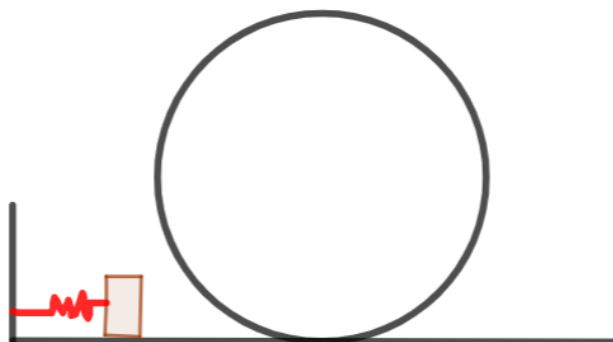
9. Στο παρακάτω σχήμα 4 όμοια σώματα, μάζας m το καθένα, είναι τοποθετημένα πάνω σε τετράγωνο πλευράς a . Τα σώματα κινούνται πάνω σε ένα κύκλο με γωνιακή ταχύτητα ω λόγω των ελκτικών δυνάμεων μεταξύ τους. Να δείξετε ότι

$$\omega = \sqrt{\frac{Gm}{a^3} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \right)}$$

όπου G είναι το σταθερό παγκόσμιας έλξης.
(Ολυμπιάδα Φυσικής Περσίας 2010)



10. Στο παρακάτω σχήμα ένα σώμα μάζας 1 kg εφάπτεται με ένα ελατήριο με σταθερά $k = 400 \frac{\text{N}}{\text{m}}$. Να βρείτε τουλάχιστον πόσα μέτρα πρέπει να συμπιέσουμε το ελατήριο, έτσι ώστε όταν αφήνουμε το σώμα να κινηθεί, μπορεί να κινηθεί στον παρακάτω λεία κυκλική διαδρομή ακτίνας $0,5\text{ m}$.



Λύσεις

1.

$$n = \frac{t}{T} \Rightarrow 12 = \frac{30 \text{ days}}{T} = \frac{30 \times 24 \times 3600s}{T} \Rightarrow T = 216000 \text{ s}$$
$$\Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2 \times 3,14}{216000} = 2,9 \times 10^{-5} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

2.

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi \text{ rad}}{60 \times 60s} = \frac{\pi}{1800} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

3.

Έχουμε:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \stackrel{T=\frac{1}{f}}{\Longrightarrow} \omega = 2\pi f = 2 \times \pi \times 5 = 10\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Άρα από τον τύπο του κεντρομόλου επιτάχυνση:

$$a_c = r\omega^2 = 0,4 \times (10\pi)^2 = 394,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

4.

Η θετική φορά του κεντρομόλου δύναμη είναι προς τα κάτω (αφού είναι προς το κέντρο του ημικύκλιου). Επίσης η συνισταμένη των δυνάμεων στον άξονα ψ είναι ο κεντρομόλος δύναμη, δηλαδή:

$$\Sigma F_y = F_c \Rightarrow mg - N = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow \boxed{N = m \left(g - \frac{v^2}{R} \right)}$$

5.

Η κεντρομόλος δύναμη σε αυτή την περίπτωση είναι η στατική τριβή (όπως το αυτοκίνητο σε στροφή).

$$f_s = F_c \Rightarrow f_s = m\omega^2 r$$

Το σβηστήρι ισορροπεί στον κατακόρυφο άξονα. Δηλαδή από τον πρώτο νόμο του Νεύτωνα:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow |N| = mg$$

Επίσης:

$$f_s \leq f_{smax}$$

$$\Rightarrow f_s \leq \mu_s N$$

$$\Rightarrow m\omega^2 r \leq \mu_s mg$$

$$\Rightarrow \omega^2 \leq \frac{mg}{r}$$

$$\Rightarrow \omega \leq \sqrt{\frac{mg}{r}}$$

$$\text{Όμως } \omega = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$\Rightarrow f \leq \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{mg}{r}}$$

$$\Rightarrow \boxed{f_{max} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{mg}{r}}}$$

6.

Η μηχανική ενέργεια της λάμπας διατηρείται και για αυτό είναι προφανές ότι έχει την μέγιστη ταχύτητα όταν το νήμα (καλώδιο) είναι κατακόρυφο (συμπέρασμα 1). Από την άλλη πλευρά η

κεντρομόλος είναι η συνισταμένη δύναμη στον άξονα που περνά από το νήμα. Δηλαδή $T - W_y = \frac{mv^2}{L} \Rightarrow T = \frac{mv^2}{L} + mg \cos \varphi$

Όσο πιο μικρή είμαι η γωνιά φ τόσο πιο μεγάλη είναι το $\cos \varphi$ (συμπέρασμα 2). Άρα λοιπόν από τα συμπεράσματα 1 και 2 είναι προφανές ότι η τάση του νήματος είναι μέγιστη όταν το καλώδιο είναι κατακόρυφο.

Όταν το νήμα είναι κατακόρυφο

$$T = \frac{mv^2}{L} + mg$$

Επίσης αφού η μηχανική ενέργεια της λάμπας διατηρείται

$$E_{MA} = E_{MB} \Rightarrow mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\Rightarrow mg(L - L \cos \theta) = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\Rightarrow v^2 = 2gL(1 - \cos \theta)$$

$$\Rightarrow T = \frac{2mgL(1 - \cos \theta)}{L} + mg = 2mg(1 - \cos \theta) + mg$$

Θέτουμε $T=36\text{N}$, για να βρούμε την μέγιστη γωνιά θ .

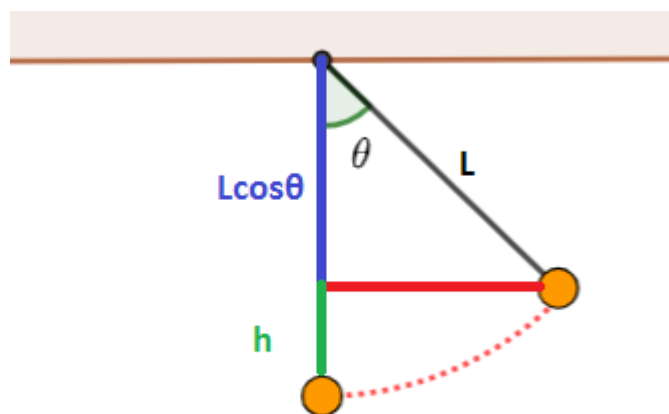
Άρα

$$36 = 2 \times 2 \times 10 \times (1 - \cos \theta) + 2 \times 10$$

$$\Rightarrow 1 - \cos \theta = \frac{16}{40} = \frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow \cos \theta = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \theta = 53^\circ$$



7.

$$F = m\omega^2 R \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{F}{Rm}}$$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{F}{Rm}}} = 2\pi \sqrt{\frac{mR}{F}}$$

$$\Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{2\pi \sqrt{\frac{m_1 R_1}{F}}}{2\pi \sqrt{\frac{m_2 R_2}{F}}} = \sqrt{\frac{m_1 R_1}{m_2 R_2}}$$

8.

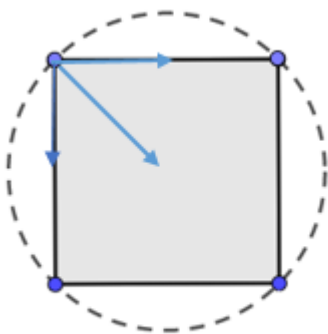
Η συνισταμένη δύναμη στον άξονα ψ είναι η κεντρομόλος δύναμη.
Άρα:

$$\frac{mv^2}{L} = 3mg - mg \Rightarrow \frac{v^2}{L} = 2g \Rightarrow v = \sqrt{2gL}$$

9.

Η κεντρομόλος δύναμη σε κάθε σώμα είναι η συνισταμένη δύναμη στον άξονα που έχει φορά προς το κέντρο του κύκλου (άξονα χ).

Γι' αυτό θα υπολογίσουμε πρώτα αυτή την δύναμη.



Έχουμε από την σχέση για την ελκτική δύναμη και το πυθαγόρειο θεώρημα:

$$|F_1| = \frac{Gm^2}{R^2} = \frac{Gm^2}{(a\sqrt{2})^2} = \frac{Gm^2}{2a^2}$$

$$|F_2| = |F_3| = \frac{Gm^2}{a^2}$$

$$\Rightarrow \Sigma F_x = F_1 + F_{2x} + F_{3x} = \frac{Gm^2}{2a^2} + 2 \frac{Gm^2}{a^2} \cos 45 = \frac{Gm^2}{a^2} \left(\frac{1}{2} + \sqrt{2} \right)$$

Από τον τύπο της κεντρομόλου δύναμη:

$$\frac{Gm^2}{a^2} \left(\frac{1}{2} + \sqrt{2} \right) = mr\omega^2$$

Όπου $r = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ (Από πυθαγόρειο). Λύνοντας την εξίσωση παίρνουμε:

$$\omega^2 = \frac{\frac{Gm^2}{a^2} \left(\frac{1}{2} + \sqrt{2} \right)}{\frac{ma\sqrt{2}}{2}} = \frac{Gm}{a^3} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \right) \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{Gm}{a^3} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \right)}$$

10.

Έστω ότι το σώμα ολοκληρώνει την κυκλική διαδρομή. Πρώτα από την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας,

$$E_A = E_B \Rightarrow \boxed{\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv_B^2 + mg(2r)}$$

Επίσης στην θέση B, (από παράδειγμα 5- κεντρομόλου δύναμη)

$$v_B \geq \sqrt{gr} = \sqrt{5} \frac{m}{s}$$

$$\text{Αρα } \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} m v_B^2 + mg(2r) \Rightarrow 200x^2 \geq \frac{5}{2} + 10 \times (2 \times 0,5)$$

$$\Rightarrow \boxed{x \geq 0,25 \text{ m}}$$

Κεφάλαιο 5: Ορμή

Η έννοια της ορμής και της μέσης συνισταμένης δύναμης

Έστω ότι μια σφήκα και ένα φορτηγό κινούνται με την ίδια σταθερή ταχύτητα προς έναν τοίχο. Όταν μελετούμε την κίνηση τους δεν υπάρχει καμία διαφορά μεταξύ τους αφού τα δύο έχουν σταθερές και ίσες ταχύτητες. Όμως όταν η σφήκα και το φορτηγό συγκρούονται με τον τοίχο, η σφήκα συντρίβεται αλλά το φορτηγό σπάζει τον τοίχο. Στην πραγματικότητα υπάρχει αρκετά μεγάλη διαφορά μεταξύ των μαζών τους, και ο λόγος που υπάρχει το παραπάνω φαινόμενο είναι οι διαφορετικές μάζες των δυο σωμάτων. Για αυτό τον λόγο, για να μελετήσουμε την κίνηση ενός σώματος ορίζουμε ένα καινούργιο μέγεθος που λέγεται η **ορμή**.

Το διάνυσμα της ορμής δίνεται από την σχέση $\vec{P} = m\vec{v}$ όπου m είναι η μάζα του σώματος και $\vec{v}$ είναι η ταχύτητα του.

Η μονάδα μέτρησης της ορμής στο S.I. είναι $kg \frac{m}{s}$

Όμως η ορμή ενός σώματος συνδέεται με την **μέση συνισταμένη δύναμη** που ασκείται επάνω του.

Από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, η μέση συνισταμένη δύναμη ισούται με:

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a} = m \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{m(\vec{v} - \vec{v}_0)}{\Delta t} = \frac{m\vec{v} - m\vec{v}_0}{\Delta t} = \frac{\vec{P} - \vec{P}_0}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t}$$

Δηλαδή η μέση συνισταμένη δύναμη που ασκείται σε ένα σώμα κατά συγκεκριμένο χρονικό διάστημα υπολογίζεται ως:

$$\boxed{\Sigma \vec{F} = \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t}}$$

(Γενικευμένος 2^{ος} Νόμος του Νεύτωνα)

Παράδειγμα 1: Μια μπάλα μάζας 2kg αφήνεται από ηρεμία από ύψος 5m πάνω από το έδαφος. Αφού συγκρουστεί με το έδαφος, αναπηδά με ταχύτητα 5 m/s. Εάν η μπάλα ήταν σε επαφή με το έδαφος για 0,1s, βρείτε τη μέση δύναμη που ασκείται στην μπάλα από το έδαφος. (Έστω ότι $g = 10 \frac{m}{s^2}$)

Λύση:

Θεωρούμε ότι η θετική κατεύθυνση είναι προς τα κάτω. Η μπάλα εκτελεί ελεύθερη πτώση, δηλαδή:

$$2g\Delta y = v_1^2 - v_0^2 \Rightarrow v_1^2 = 2 \times 10 \times 5 \Rightarrow v_1^2 = 100 \Rightarrow v_1 = 10 \frac{m}{s}$$

Θα υπολογίσουμε την ορμή της μπάλας ακριβώς πριν και μετά τη σύγκρουση με το έδαφος:

$$\vec{P}_1 = m\vec{v}_1 = 2 \times 10 = 20 kg \frac{m}{s}$$

$$\vec{P}_2 = m\vec{v}_2 = 2 \times (-5) = -10 kg \frac{m}{s}$$

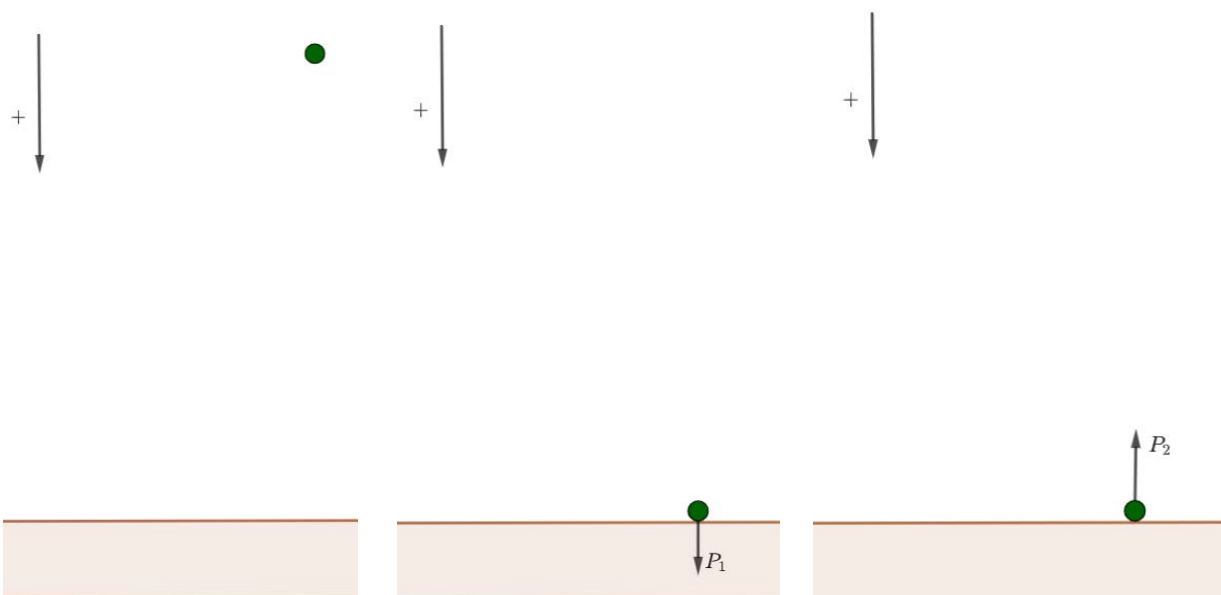
Να προσέξετε ότι η μπάλα αναπηδά αρά η ταχύτητα του μετά την σύγκρουση με το έδαφος είναι αντίρροπη της αρχικής ταχύτητας.

Με άλλα λόγια έχει αρνητική τιμή.

$$\text{Άρα } \Delta \vec{P} = -10 - 20 = -30 kg \frac{m}{s}$$

Άρα η μέση συνισταμένη δύναμη που ασκείται στην μπάλα είναι:

$$\bar{F} = \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t} = \frac{-30}{0,1} = -300 N$$



Παράδειγμα 2: Μία μπάλα ποδοσφαίρου μάζας 200 g κινείται σε οριζόντιο έδαφος με ταχύτητα 10 m/s. Ένας ποδοσφαιριστής κλωτσά την μπάλα και η μπάλα φεύγει από το έδαφος με ταχύτητα 20 m/s και γωνιά 37° ως προς το έδαφος. Εάν η μπάλα ήταν σε επαφή με το πόδι του ποδοσφαιριστή για 0,01s, να βρείτε το μέτρο της μέσης δύναμης που ασκείται στην μπάλα.

Λύση

Έστω ότι η ταχύτητα της μπάλας πριν και μετά που φεύγει από το έδαφος είναι u και v αντίστοιχα.

Θα αναλύσουμε την ταχύτητα v σε συνιστώσες v_x και v_y . Έχουμε:

$$v_x = 20\cos 37 = 16 \frac{m}{s} \text{ και } v_y = 20\sin 37 = 12 \frac{m}{s}. \text{ Άρα}$$

$$\vec{v} = 16i + 12j$$

Επίσης αφού η αρχική της ταχύτητα ήταν οριζόντια έχουμε $\vec{u} = 10i$

Άρα η μέση συνισταμένη δύναμη δίνεται από την σχέση:

$$\Sigma \vec{F} = \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t} = \frac{m(\vec{v} - \vec{u})}{0,01} = \frac{0,2}{0,01} (16i + 12j - 10i) = 120i + 240j$$

$$\text{Άρα } |\Sigma \vec{F}| = \sqrt{120^2 + 240^2} = 268 \text{ N}$$



Ασκήσεις για εξάσκηση

1. Μία μπάλα μάζας 5kg βάλλεται με οριζόντια ταχύτητα 6 m/s από αρχικό ύψος 3,2m από το έδαφος. Η μπάλα χτυπά το έδαφος και αναπηδά με ταχύτητα 8m/s η οποία σχηματίζει γωνιά 53° με το έδαφος. Εάν η μπάλα ήταν σε επαφή με το έδαφος για 0,01s, να υπολογίσετε τη μέση συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο σώμα.
2. Ένα αυτοκίνητο και ένα φορτηγό με μάζες 1500kg και 18000 kg αντίστοιχα κινούνται το ένα προς το άλλο με ταχύτητες 8m/s και 5m/s αντίστοιχα. Κάποια στιγμή συγκρούονται μεταξύ τους και κινούνται με κοινή ταχύτητα 4 m/s. Η σύγκρουση διαρκεί για 0,2s. Δεδομένου ότι ο οδηγός του φορτηγού του αυτοκινήτου έχουν μάζα 100 κιλών ο καθένας, να προσδιορίσετε τον λόγο $\frac{F_2}{F_1}$ όπου F_2 είναι η μέση δύναμη που ασκείται στον οδηγό του αυτοκινήτου κατά τη διάρκεια της σύγκρουσης και F_1 είναι η μέση δύναμη που ασκείται στον οδηγό του φορτηγού κατά τη διάρκεια της σύγκρουσης.

Λύσεις

1.

Έστω ότι η ταχύτητα της μπάλας ακριβώς πριν και μετά από το χτύπημα στο έδαφος είναι u και v αντίστοιχα. Η μπάλα εκτελεί οριζόντια βολή. Άρα η ταχύτητα της ακριβώς πριν να χτυπήσει το έδαφος δίνεται από τις σχέσεις

$$u_x = u_0 = 6 \frac{m}{s}$$

$$u_y = -gt = -g \sqrt{\frac{2H}{g}} = -\sqrt{2gH} = \sqrt{2 \times 10 \times 3,2} = -8 \frac{m}{s}$$

$$\text{Άρα } \vec{u} = 6i - 8j$$

Επίσης αναλύουμε την ταχύτητα v σε δύο συνιστώσες και έχουμε:

$$v_x = v \cos 53^\circ = 4,8 \frac{m}{s}, v_y = v \sin 53^\circ = 6,4 \frac{m}{s}. \text{ Άρα } \vec{v} = 4,8i + 6,4j.$$

Τώρα η μέση συνισταμένη δύναμη υπολογίζεται ως:

$$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t} = \frac{P_2 - P_1}{0,01} = \frac{m(\vec{v} - \vec{u})}{0,01} = \frac{5(4,8i + 6,4j - 6i + 8j)}{0,01}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = -600i + 7200j$$

$$\Rightarrow |\vec{F}| = \sqrt{600^2 + 7200^2} = 600\sqrt{145} = 7225 \text{ N}$$

2.

Από την σχέση $F = \frac{\Delta P}{\Delta t}$, έχουμε $F \Delta t = \Delta P \Rightarrow F \Delta t = m \Delta v$

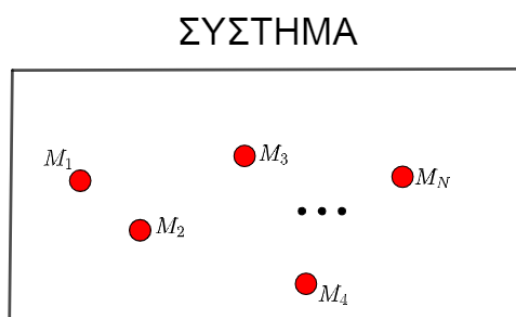
$$\Rightarrow \begin{cases} F_1 \Delta t_1 = m_1 \Delta v_1 \\ F_2 \Delta t_2 = m_2 \Delta v_2 \end{cases} \xrightarrow{\Delta t_1 = \Delta t_2 = 0,2, m_1 = m_2 = 100} \frac{F_2}{F_1} = \frac{\Delta v_2}{\Delta v_1} = \frac{4 - (-8)}{4 - 5}$$

$$\Rightarrow \frac{F_2}{F_1} = -12$$

Η Αρχή Διατήρησης της Ορμής

Δίνεται ένα σύστημα σωμάτων το οποίο αποτελείται από N σώματα μαζών $m_1, m_2, \dots, m_N$ που κινούνται με ταχύτητες $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_N$ αντίστοιχα. Το διανυσματικό άθροισμα

$\vec{P} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots + m_N \vec{v}_N$, δηλαδή το διανυσματικό άθροισμα των ορμών των N σωμάτων ονομάζεται συνολική ορμή του συστήματος.



Τώρα υπάρχουν δυνάμεις που ασκούνται μεταξύ των σωμάτων του συστήματος, που λέγονται εσωτερικές δυνάμεις. Όμως μελετώντας το σύστημα των σωμάτων (δηλαδή όλα τα σώματα μαζί), αυτές οι δυνάμεις εμφανίζονται σε ζεύγη δράσης-αντίδρασης και συνεπώς η συνισταμένη τους ισούται με μηδέν.

Άρα προφανώς μόνο οι εξωτερικές δυνάμεις, δηλαδή οι δυνάμεις που ασκούν σώματα εκτός του συστήματος στα σώματα του συστήματος (π.χ. το βάρος που ασκείται από την Γη εάν η Γη δεν ανήκει στο σύστημα) μεταβάλλουν τη συνολική ορμή του συστήματος. Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής αυτής από το γενικευμένο 2^ο Νόμο του Νεύτωνα ισούται με την **συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων**. Δηλαδή:

$$\Sigma \vec{F}_{ext} = \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta \vec{P} = \Sigma \vec{F}_{ext} \Delta t} : (1)$$

Από την σχέση (1) είναι φανερό ότι εάν σε ένα σύστημα η **συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων ισούται με μηδέν**, τότε $\Delta \vec{P} = 0$, δηλαδή η συνολική ορμή του συστήματος **δεν μεταβάλλεται (Αρχή Διατήρησης της Ορμής)**.

Επιπλέον εάν η εξωτερική συνισταμένη δύναμη δρα στο σύστημα για **πολύ μικρό χρονικό διάστημα** τότε $\Delta t \approx 0$. Άρα από την σχέση (1) παίρνουμε $\Delta \vec{P} \approx 0$, δηλαδή, δηλαδή η συνολική ορμή του συστήματος **δεν μεταβάλλεται προσεγγιστικά**.

Παράδειγμα 1: Ένας πύραυλος μάζας 3000kg κινείται στο διάστημα σε οριζόντια διεύθυνση (όπου δεν ασκείται καμία δύναμη στο πύραυλο) με σταθερή ταχύτητα 100m/s. Ο εκτοξευτής του πυραύλου (που αποτελεί το πίσω μέρος του), μάζας 1000kg διαχωρίζεται από τον πύραυλο και κινείται προς την αντίθετη κατεύθυνση με ταχύτητα 40 m/s. Να υπολογίσετε την ταχύτητα του πυραύλου μετά την διαχώριση του εκτοξευτή.

Λύση

Οι δυνάμεις που αναπτύσσονται μεταξύ του εκτοξευτή και του πυραύλου είναι εσωτερικές. Άρα ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής.

$$P_{\alpha\rho\chi.\sigma\upsilon\sigma} = P_{\tau\epsilon\lambda.\sigma\upsilon\sigma}$$

$$\Rightarrow Mu = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

$$\Rightarrow v_1 = \frac{Mu - m_2 v_2}{m_1} = \frac{(3000 \times 100 - 1000 \times (-40))}{(3000 - 1000)} = 170 \frac{m}{s}$$

Προσοχή 1: Αφού ο εκτοξευτής κινείται προς την αντίθετη κατεύθυνση, έχει αρνητική ταχύτητα $-40 \frac{m}{s}$

Παράδειγμα 2: Μια μικρή σφαίρα μάζας m κινείται με σταθερή ταχύτητα v και χτυπά ένα αρχικά ακίνητο ξύλινο κύβο μάζας $2m$ πάνω σε μια λεία επιφάνεια. Η σφαίρα περνάει από το κύβο και η ταχύτητά της μειώνεται σε $\frac{v}{2}$. Να βρείτε την θερμική ενέργεια που απελευθερώνεται κατά την σύγκρουση.



Λύση

Θεωρούμε ότι ο κύβος και η σφαίρα είναι ένα σύστημα και έστω ότι η ταχύτητα του κύβου μετά την σύγκρουση είναι u . Η αρχική συνολική ορμή του συστήματος $\vec{P}_1 = mv$ και μετά τη σύγκρουση είναι $\vec{P}_2 = \frac{mv}{2} + 2mu$. Αφού η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων είναι μηδέν, ισχύει η Αρχή Διατήρησης της Ορμής

$$mv = \frac{mv}{2} + 2mu \Rightarrow \boxed{u = \frac{v}{4}}$$

Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{v}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}(2m)\left(\frac{v}{4}\right)^2 + Q$$

όπου Q είναι η θερμική ενέργεια.

Λύνοντας την εξίσωση παίρνουμε: $\boxed{Q = \frac{5}{16}mv^2}$

Ελαστικές και ανελαστικές κρούσεις

Όταν δυο σώματα σε οριζόντιο επίπεδο συγκρούονται, οι δυνάμεις που αναπτύσσονται μεταξύ τους είναι εσωτερικές δυνάμεις του συστήματος των δύο σωμάτων. Εάν δεν υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις στα σώματα (π.χ. τριβή) ή εάν η διάρκεια της κρούσης είναι αμελητέα, τότε ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής για το σύστημα των σωμάτων. Μια κρούση που γίνεται σε ευθεία γραμμή λέγεται μετωπική κρούση. Γενικά υπάρχουν δυο κατηγορίες κρούσεων: ελαστικές και ανελαστικές.

Κατηγορία 1: Μετωπικές ελαστικές κρούσεις

Μία κρούση στην οποία δεν υπάρχει απώλεια κινητικής ενέργειας λέγεται ελαστική κρούση. Από τον ορισμό, είναι φανερό ότι δεν απελευθερώνεται θερμότητα και δεν ακούγεται κρότος κατά μια ελαστική κρούση. Θα μελετήσουμε αυτές τις κρούσεις.

Έστω ότι έχουμε δυο σώματα με μάζες m_1 και m_2 που κινούνται με ταχύτητες v_1 και v_2 αντίστοιχα. Επίσης έστω ότι τα σώματα συγκρούονται ελαστικά και μετά την κρούση, τα σώματα με μάζες m_1 και m_2 κινούνται με ταχύτητες u_1 και u_2 αντίστοιχα. Θα προσπαθούμε να βρούμε αυτές τις τελικές ταχύτητες συναρτήσει των αρχικών ταχυτήτων και των μαζών.

Από τον ορισμό της ελαστικής κρούσης, η συνολική κινητική ενέργεια του συστήματος διατηρείται. Άρα

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m_1(v_1^2 - u_1^2) = \frac{1}{2}m_2(u_2^2 - v_2^2)$$

$$\Rightarrow m_1(v_1 - u_1)(v_1 + u_1) = m_2(u_2 - v_2)(u_2 + v_2)$$

Επίσης ισχύει η Αρχή Διατήρησης της Ορμής. Δηλαδή:

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1u_1 + m_2u_2$$

$$\Rightarrow m_1(v_1 - u_1) = m_2(u_2 - v_1)$$

Άρα από την σχέση $m_1(v_1 - u_1)(v_1 + u_1) = m_2(u_2 - v_2)(u_2 + v_2)$, είναι φανερό ότι πρέπει να ισχύει:

$$\boxed{v_1 + u_1 = v_2 + u_2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_1 + u_1 = v_2 + u_2 \\ m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_1 - u_2 = v_2 - v_1 \\ m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_2 u_1 - m_2 u_2 = m_2 v_2 - m_2 v_1 \\ m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2 \end{cases}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε:

$$m_2 u_1 + m_1 u_1 = 2m_2 v_2 + m_1 v_1 - m_2 v_1$$

$$\Rightarrow u_1(m_1 + m_2) = 2m_2 v_2 + m_1 v_1 - m_2 v_1$$

$$\Rightarrow \boxed{u_1 = \frac{2m_2 v_2 + m_1 v_1 - m_2 v_1}{m_1 + m_2}}$$

$$\Rightarrow u_2 = v_1 + u_1 - v_2 = \frac{2m_2 v_2 + m_1 v_1 - m_2 v_1}{m_1 + m_2} + v_1 - v_2$$

$$\Rightarrow u_2 = \frac{2m_2 v_2 + m_1 v_1 - m_2 v_1 + m_1 v_1 + m_2 v_1 - m_1 v_2 - m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

$$\Rightarrow \boxed{u_2 = \frac{2m_1 v_1 + m_2 v_2 - m_1 v_2}{m_1 + m_2}}$$

Άρα οι τελικές ταχύτητες των δυο σωμάτων μετά την κρούση δίνονται από τις σχέσεις:

$$u_1 = \frac{2m_2 v_2 + m_1 v_1 - m_2 v_1}{m_1 + m_2} \quad \text{και} \quad u_2 = \frac{2m_1 v_1 + m_2 v_2 - m_1 v_2}{m_1 + m_2}$$

Κατηγορία 2: Μετωπικές ανελαστικές κρούσεις

Οι παραπάνω κρούσεις στην πραγματικότητα είναι ανελαστικές, αφού απελευθερώνεται ηχητική και θερμική ενέργεια. Μία ειδική περίπτωση είναι όταν τα δύο σώματα συσσωματώνονται μετά την κρούση και προφανώς αφού συσσωματώνονται κινούνται με την ίδια ταχύτητα. Ονομάζουμε τέτοιες κρούσεις ως απόλυτα ανελαστικές ή **πλαστικές** κρούσεις. Θα μελετήσουμε αυτές τις κρούσεις.

Έστω ότι έχουμε δυο σώματα με μάζες m_1 και m_2 που κινούνται με ταχύτητες v_1 και v_2 αντίστοιχα. Έστω ότι τα σώματα συγκρούονται ελαστικά και μετά την κρούση, τα σώματα κινούνται με κοινή ταχύτητα u . Αφού ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής έχουμε:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)u$$

$$\Rightarrow \boxed{u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}}$$

Κατηγορία 3: Κρούσεις σε δύο διαστάσεις

Μερικές φορές μια κρούση δεν είναι μετωπική και τα σώματα που συγκρούονται, συγκρούονται υπό κάποια γωνιά. Σε αυτές τις περιπτώσεις ομοίως ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής εάν δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις στο σύστημα των δύο σωμάτων.

Θα μελετήσουμε ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 1: Ένα σώμα μάζας 9kg κινείται με σταθερή ταχύτητα μέτρου 20 m/s και με γωνιά 37° ως προς τον άξονα x . Άλλο σώμα μάζας 7kg κινείται με κατακόρυφη ταχύτητα 28 m/s στη θετική κατεύθυνση του άξονα y . Εάν τα δύο σώματα συγκρούονται πλαστικά, να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος.

Λύση

Αναλύουμε την ταχύτητα του πρώτου σώματος σε δυο συνιστώσες και στην συνέχεια, την γράφουμε σε διανυσματική μορφή.

$$v_{1x} = v_1 \cos 37 = 16 \frac{m}{s}, \quad v_{1y} = v_1 \sin 37 = 12 \frac{m}{s}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_1 = 16i + 12j, \quad \vec{v}_2 = 28j$$

Τώρα ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής. Δηλαδή:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{u}$$

$$\Rightarrow \vec{u} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

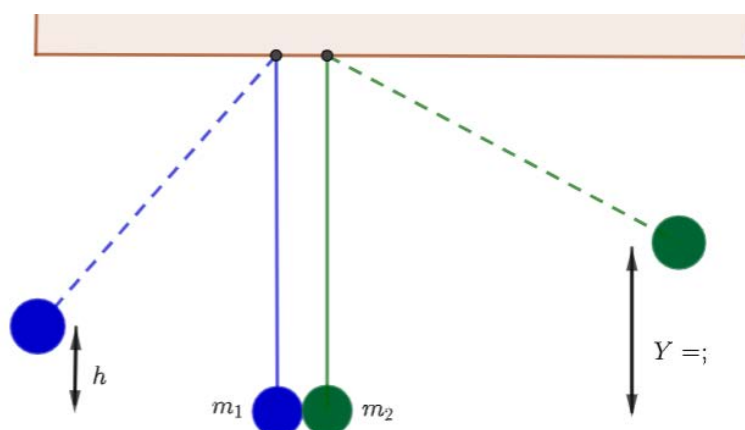
$$\Rightarrow \vec{u} = \frac{9 \times (16i + 12j) + 7 \times 28j}{9 + 7}$$

$$\Rightarrow \vec{u} = 9i + 19j$$

$$\Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{9^2 + 19^2} = 21 \frac{m}{s}$$

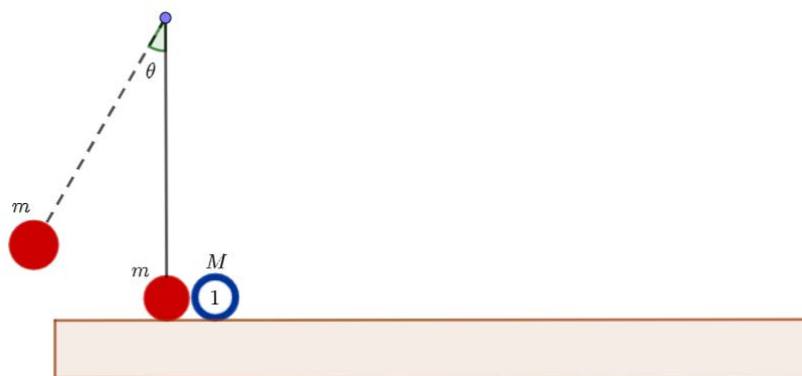
Ασκήσεις ενότητας

1. Ένας μαθητής στέκεται πάνω στο skateboard του με μία μπάλα του ποδοσφαίρου στα χέρια του σε μία μέρα που χιονίζει (δηλαδή δεν υπάρχει τριβή μεταξύ του skateboard και του εδάφους). Ο μαθητής ρίχνει την μπάλα του με μεγάλη οριζόντια ταχύτητα μπροστά. Να εξηγήσετε γιατί ο μαθητής γλιστρά μαζί με το skateboard του προς τα πίσω.
2. Δύο όμοιες ελαστικές σφαίρες μάζες m_1 και m_2 κρέγονται από την οροφή μέσω δύο αβαρών νημάτων ίσου μήκους. Η σφαίρα μάζας m_1 ανυψώνεται σε ύψος h από την αρχική της θέση και αφήνεται να κινηθεί ελεύθερα. Η σφαίρα στην συνέχεια συγκρούεται με την σφαίρα μάζας m_2 . Να υπολογίσετε τη μέγιστη ανύψωση Y της σφαίρας 2 συναρτήσει των μεγεθών m_1 , m_2 , g , και h .



3. Μία μπάλα του μπάσκετ μάζας 600g αφήνεται ελεύθερα να πέσει στο έδαφος από ύψος 5m. Η μπάλα συγκρούεται με το έδαφος και αναπηδά. Εάν η απώλεια ενέργειας κατά την σύγκρουση είναι 3J και η διάρκεια της κρούσης ήταν 0,05s , να υπολογίσετε τη μέση συνισταμένη δύναμη που δέχεται η μπάλα.

4. Μία ελαστική σφαίρα μάζας m κρέμεται κατακόρυφα από ένα αβαρές νήμα μήκους L το οποίο συνδέεται με την οροφή. Το κατώτερο σημείο της σφαίρας εφάπτεται αρχικά στο έδαφος. Δίπλα από την σφαίρα στον έδαφος εφάπτεται μια μπάλα του μπυλιάρδου μάζας M . Το νήμα και η σφαίρα ανυψώνονται ώστε το νήμα να σχηματίζει γωνιά θ με τον οριζόντιο άξονα. Η σφαίρα αφήνεται να κινηθεί ελεύθερα και στη συνέχεια συγκρούεται με την μπάλα. Να υπολογίσετε την ταχύτητα της μπάλας ακριβώς μετά την κρούση συναρτήσει των μεγεθών θ , M , m , g και L υποθέτοντας ότι η κρούση είναι εντελώς ελαστική.



5. Όταν μία μικρή τσίχλα βάζεται προς ένα κινούμενο αυτοκίνητο συγκρούεται με το αυτοκίνητο και κολλά σε αυτό. Δηλαδή γίνεται μία πλαστική κρούση. Να εξηγήσετε γιατί δεν παρατηρούμε μεταβολή στην ταχύτητα του αυτοκινήτου παρόλο που γίνεται μια κρούση, τεκμηριώνοντας την απάντησή σας με την χρήση των μαθηματικών τύπων.

Λύσεις

1.

Έστω ότι ο μαθητής ρίχνει την μπάλα με ταχύτητα $v_{μπ}$. Για το σύστημα μαθητή-skateboard και μπάλας, η αρχική ορμή είναι μηδέν. Μετά που ο μαθητής ρίχνει την μπάλα, από την αρχή διατήρησης της ορμής, η ορμή του συστήματος πρέπει να παραμένει μηδέν (αφού δεν υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις στο σύστημα).

Άρα πρέπει να έχουμε:

$$0 = m_{μπ} v_{μπ} + P$$

$$\Rightarrow P_s = -m_{μπ} v_{μπ}$$

Δηλαδή ο μαθητής και το skateboard δεν θα έχουν μηδενική ορμή και θα κινούνται.

$$\text{Τώρα } P = -m_{μπ} v_{μπ} \Rightarrow Mu = -m_{μπ} v_{μπ} \Rightarrow u = -\frac{m_{μπ} v_{μπ}}{M}$$

Άρα η ταχύτητα τους θα είναι αντίρροπη της μπάλας και θα κινούνται προς τα πίσω.

2.

Από την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργεια η ταχύτητα v_1 της σφαίρας 1 πριν την κρούση δίνεται από την σχέση:

$$m_1 gh = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gh}$$

Επίσης αφού η κρούση είναι ελαστική οι ταχύτητες των σφαιρών μετά την κρούση δίνονται από τις σχέσεις:

$$\begin{cases} v_1 + u_1 = v_2 + u_2 \\ m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow u_1 = \frac{2m_2 v_2 + m_1 v_1 - m_2 v_1}{m_1 + m_2} \quad \text{και} \quad u_2 = \frac{2m_1 v_1 + m_2 v_2 - m_1 v_2}{m_1 + m_2}$$

Αφού το σώμα 2 ήταν ακίνητο πριν την κρούση $v_2 = 0$ άρα η ταχύτητα της σφαίρας 2 μετά την κρούση είναι

$$u_2 = \frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

Εφαρμόζουμε ξανά την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας και έχουμε:

$$\frac{1}{2} m u_2^2 = m g Y \Rightarrow Y = \frac{u_2^2}{2g} = \frac{4m_1^2 v_1^2}{2g(m_1 + m_2)^2} = \frac{4m_1^2 (2gh)}{2g(m_1 + m_2)^2}$$

$$\Rightarrow Y = \frac{4hm_1^2}{(m_1 + m_2)^2}$$

3.

Θεωρούμε ότι η θετική κατεύθυνση είναι προς τα κάτω. Η μπάλα εκτελεί ελεύθερη πτώση, δηλαδή:

$$2g\Delta y = v_1^2 - v_0^2 \Rightarrow v_1^2 = 2 \times 10 \times 5 \Rightarrow v_1^2 = 100 \Rightarrow v_1 = 10 \frac{m}{s}$$

Η απώλεια ενέργειας της σφαίρας είναι 3J, δηλαδή:

$$E_{k_2} = E_{k_1} - 5 = \frac{1}{2} m v_1^2 - 5 = \frac{1}{2} \times 0,6 \times 10^2 - 3 = 27J$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m v_2^2 = 27 \Rightarrow v_2^2 = 90 \Rightarrow \boxed{v_2 = -9,5 \frac{m}{s}}$$

Άρα:

$$\vec{P}_1 = m\vec{v}_1 = 0,6 \times 10 = 6kg \frac{m}{s}$$

$$\vec{P}_2 = m\vec{v}_2 = 0,6 \times (-9,5) = -5,7 kg \frac{m}{s}$$

Άρα η μέση συνισταμένη δύναμη που ασκείται στην μπάλα είναι:

$$\bar{F} = \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t} = \frac{-5,7 - 6}{0,05} = -234N$$

4.

Από το σχήμα είναι φανερό ότι η σφαίρα ανυψώθηκε κατά

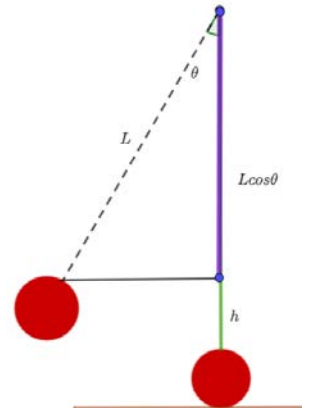
$$h = L - L\cos\theta$$

Άρα από την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας:

$$mgh = \frac{1}{2}mv_1^2$$

$$\Rightarrow v_1 = \sqrt{2gh}$$

$$\Rightarrow v_1 = \sqrt{2gL(1 - \cos\theta)}$$



Επίσης αφού η κρούση είναι ελαστική οι ταχύτητες των σφαιρών μετά την κρούση δίνονται από τις σχέσεις:

$$\begin{cases} v_1 + u_1 = v_2 + u_2 \\ m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow u_1 = \frac{2m_2 v_2 + m_1 v_1 - m_2 v_1}{m_1 + m_2} \text{ και } u_2 = \frac{2m_1 v_1 + m_2 v_2 - m_1 v_2}{m_1 + m_2}$$

Αφού το σώμα 2 ήταν ακίνητο πριν την κρούση $v_2 = 0$ άρα η ταχύτητα της σφαίρας 2 μετά την κρούση είναι

$$u_2 = \frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

$$\Rightarrow \boxed{u_2 = \frac{2m_1 \sqrt{2gL(1 - \cos\theta)}}{m_1 + m_2}}$$

5.

Έχουμε πλαστική κρούση. Άρα η ταχύτητα του αυτοκινήτου μετά την κρούση με τη τσίχλα δίνεται από την σχέση:

$$u = \frac{m_A v_A + m_T v_T}{m_A + m_T}$$

$$\Rightarrow u = \frac{\frac{m_A v_A + m_T v_T}{m_A}}{\frac{m_A + m_T}{m_A}}$$

$$\Rightarrow u = \frac{\frac{m_A v_A}{m_A} + \frac{m_T v_T}{m_A}}{\frac{m_A}{m_A} + \frac{m_T}{m_A}}$$

$$\Rightarrow u = \frac{v_A + \frac{m_T}{m_A} v_T}{1 + \frac{m_T}{m_A}}$$

Τώρα αφού η μάζα του αυτοκινήτου είναι πολύ μεγαλύτερη από την μάζα της τσίχλας (π.χ. η μάζα της τσίχλας είναι 20 γραμμάρια και του αυτοκινήτου είναι 1500kg) το κλάσμα $\frac{m_T}{m_A}$ τείνει να πάρει την τιμή 0. Δηλαδή $\frac{m_T}{m_A} \approx 0$

Άρα από την παραπάνω σχέση είναι φανερό ότι $u \approx v_A$

Βιβλιογραφία

- 1) Concepts of mechanics- Mehran Kamarpour-
ISBN: 978-600-288-073-4
- 2) Iranian University Entrance Examinations
- 3) Iranian Physics Olympiads- First Round



Η σειρά «Πάμε Ολυμπιάδα Φυσικής» είναι μια σειρά βιβλίων Φυσικής για μαθητές που ενδιαφέρονται για την επιστήμη της Φυσικής ή θέλουν να συμμετέχουν σε διαγωνισμούς Φυσικής και καλύπτει την θεωρία της Φυσικής με βάθος. Το βιβλίο αυτό εστιάζει στην Νευτώνεια μηχανική, δηλαδή η μελέτη της κινηματικής και δυναμικής σε διάφορες καταστάσεις.