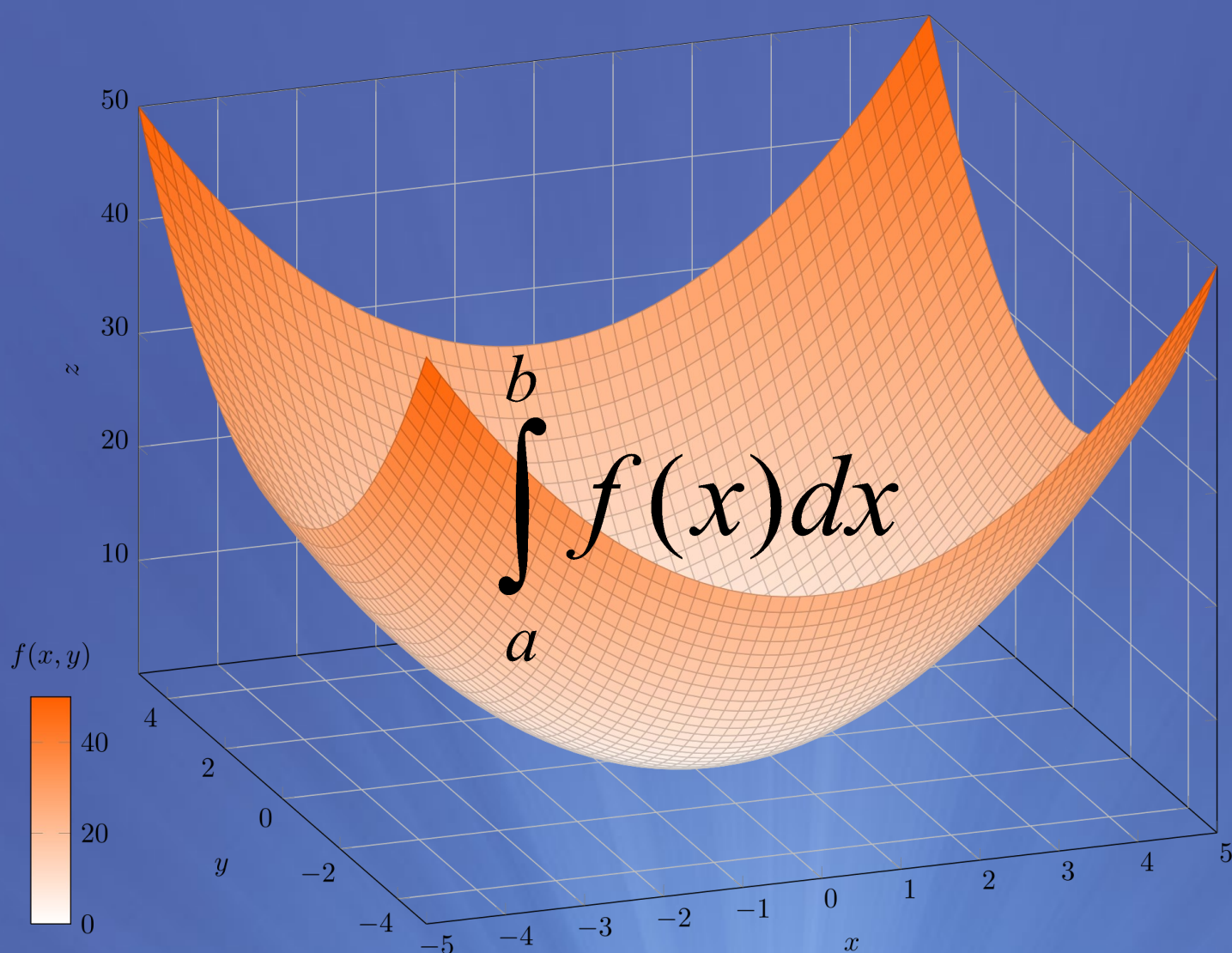


Μαθηματικοί Διαγωνισμοί για Μαθητές Γυμνασίου (Juniors)



Δάτης Καλάλη

Στον παππού και στην γιαγιά μου

Πρόλογος

Οι διαγωνισμοί των μαθηματικών διοργανώνονται στις περισσότερες χώρες σε εθνικό και διεθνή επίπεδο και κάθε χρόνο αυξάνεται η ποικιλομορφία τους. Ένας από αυτούς τους διαγωνισμούς που γίνονται κάθε χρόνο είναι η μαθηματική ολυμπιάδα. Ένα από τα σημαντικότερα οφέλη της συμμετοχής ενός μαθητή σε ολυμπιάδες μαθηματικών, είναι ότι οι διακριθέντες μαθητές θα μπορούν πιο εύκολα να έχουν πρόσβαση σε κορυφαία πανεπιστήμια του κόσμου, κάτι που θα τους εξασφαλίζει τεράστιες επιτυχίες. Γι' αυτό το λόγο, οι μαθητές χρειάζεται να αρχίζουν την προετοιμασία αυτών των διαγωνισμών από το γυμνάσιο. Έτσι, αποφάσισα να γράψω ένα βιβλίο, το οποίο να προετοιμάζει όσους μαθητές επιθυμούν να λάβουν μέρος σε τέτοιους διαγωνισμούς. Το βιβλίο αυτό δεν είναι ούτε πολύ δύσκολο αλλά ούτε πολύ εύκολο και μπορούν να το χρησιμοποιήσουν μαθητές γυμνασίου αλλά και Α' λυκείου.

Πώς είναι δομημένο το βιβλίο

Το βιβλίο αποτελείται από 4 ενότητες με 3 ή 4 υπό-ενότητες. Κάθε υπό-ενότητα του βιβλίου ξεκινά από ένα εγχειρίδιο, το οποίο προσπάθησα να είναι μικρό και χρήσιμο. Στο τέλος κάθε υπό-ενότητας, υπάρχουν λυμένα προβλήματα τα οποία κυρίως βασίζονται σε θέματα από τις Περσικές Ολυμπιάδες και Ολυμπιάδες από άλλες χώρες.

Το βιβλίο επίσης τελειώνει με μία λυμένη τελική εξέταση με 5 ασκήσεις προχωρημένου επιπέδου και μια τελική εξέταση εθνικού χωρίς λύσεις για περισσότερη εξάσκηση.

Ελπίζω πως μπορείτε να αξιοποιήσετε αυτό το βιβλίο και αυτό το βιβλίο είναι ένα βήμα για μια καλή αρχή.

Στο τέλος θέλω να ευχαριστήσω τους καθηγητές και καθηγήτριες μου της Σχολής Φόρουμ, οι οποίοι έκαναν την επεξεργασία του βιβλίου. Επίσης, θέλω να ευχαριστήσω την μητέρα μου που ήταν η καλύτερη διδάσκαλος, τον πατέρα μου, τη γιαγιά μου και τον παππού μου που με ενθάρρυναν γι' αυτή τη συγγραφή.

Ο συγγραφέας,

Δάτης Καλάλη.

Περιεχόμενα

A. Άλγεβρα

- 1) Ταυτότητες και Εξισώσεις – Σελ. 4-12
- 2) Πολυώνυμα – Σελ.13-18
- 3) Συναρτήσεις – Σελ.19-21
- 4) Ανισότητες – Σελ.22-32

B. Θεωρία αριθμών

- 1) Διαιρετότητα, Μ.Κ.Δ και Ε.Κ.Π – Σελ.34-38
- 2) Πρώτοι αριθμοί – Σελ.39-41
- 3) Ιστοτομίες – Σελ.42-46
- 4) Διοφαντικές εξισώσεις – Σελ.47-53

Γ. Γεωμετρία

- 1) Τρίγωνα, τετράπλευρα – Σελ.55-66
- 2) Κύκλοι και εγγράψιμα σχήματα – Σελ.67-78
- 3) Μετρικές σχέσεις και εμβαδά – Σελ.79-87

Δ. Συνδυαστική

- 1) Απαρίθμηση – Σελ.89-97
- 2) Βελτιστοποίηση – Σελ.98-101
- 3) Αναλλοίωτες – Σελ.102-104

Ε. Τελική εξέταση – Σελ.106-110

Στ. Λύσεις τελική εξέταση – Σελ.111-115

Ζ. Ασκήσεις Εμπλουτισμού – Σελ.116-118

Ενότητα Α

$$f(x, y, z) = \frac{x + y + z}{3}$$

$$g(x, y, z) = \sqrt[3]{xyz}$$

$$f(x, y, z) \geq g(x, y, z) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}^+$$

Άλγεβρα

1

Ταυτότητες και Εξισώσεις

Ορισμός: Ταυτότητα είναι κάθε ισότητα ή ανισότητα που περιέχει μεταβλητές και αληθεύει για όλες τις τιμές των μεταβλητών αυτών.

π.χ.

$x(y + z) = xy + xz$ είναι ταυτότητα

$2x + 7 = 5x + 1$ δεν αποτελεί ταυτότητα (ισχύει μόνο για $x = 2$)

Ταυτότητα 1

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Παράδειγμα 1

$$\text{Αν } a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2 + 2abc = 0$$

α) Να δείξετε ότι: $(a + b)(b + c)(a + c) = 0$

β) Να δείξετε ότι:

$$(a + b + c)^{2n-1} = a^{2n-1} + b^{2n-1} + c^{2n-1} \text{ για κάθε θετικό ακέραιο } n$$

Λύση: α)

$$\begin{aligned} & a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2 + 2abc \\ &= a^2b + ca^2 + ab^2 + abc + b^2c + bc^2 + c^2a + abc \\ &= a^2(b + c) + ab(b + c) + bc(b + c) + ac(b + c) = (b + c)(a^2 + ab + bc + ac) \\ &= (b + c)(a + c)(a + b) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } (a + b)(b + c)(a + c) = 0$$

β) Μια από τις παρενθέσεις στο α) ισούται με 0. Έτσι,

$$a + b = 0 \text{ ή } a = -b \text{ δηλαδή}$$

$$(a + b + c)^{2n-1} = c^{2n-1} \text{ και}$$

$$\begin{aligned} a^{2n-1} + b^{2n-1} + c^{2n-1} &= a^{2n-1} - a^{2n-1} + c^{2n-1} \\ &= c^{2n-1} \text{ (Αφού } 2n - 1 \text{ είναι περιττός)} \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } (a + b + c)^{2n-1} = a^{2n-1} + b^{2n-1} + c^{2n-1}$$

Ταυτότητα 2

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

Ταυτότητα 3

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

Άσκηση 1: Να αποδείξετε ότι

$$\sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{\frac{(\alpha^2 + \beta^2)^2 - (\alpha^4 + \beta^4)}{2}}$$

Ταυτότητα 4

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

Ταυτότητα 5

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 + b^2 - ab)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + b^2 + ab)$$

$$a^n - b^n = (a - b)(a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \dots + b^n)$$

$a^n + b^n = (a + b)(a^n - a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 - \dots + b^n)$ Το τελευταίο ισχύει μόνο όταν n είναι περιττό

Ταυτότητα 6

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3b^2a$$

$$(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3a^2b + 3b^2a$$

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b + c)(a + b)$$

Ταυτότητα 7 (Euler)

$$\begin{aligned} & a^3 + b^3 + c^3 \\ &= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) + 3abc \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2: Αν $A = x^2 - yz$, $B = y^2 - xz$ και $C = z^2 - xy$. Να υπολογίστε την τιμή της παράστασης: $E = \frac{(A+B+C)(x+y+z)}{Ax+By+Cz}$

Λύση: Από την ταυτότητα Euler

$$E = \frac{(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)(x+y+z)}{x^3+y^3+z^3-3xyz} = 1$$

Λήμμα $\boxed{x^2 + y^2 + z^2 = xy + xz + yz \text{ αν και μόνον αν } x = y = z}$

Απόδειξη:

$$1) \text{ Αν } x = y = z = k \Rightarrow B\mu = xy + xz + yz = k^2 + k^2 + k^2 = 3k^2$$

$$A\mu = k^2 + k^2 + k^2 = 3k^2 \Rightarrow A\mu = B\mu$$

$$2) \text{ Αν } x^2 + y^2 + z^2 = xy + xz + yz$$

$$\Rightarrow 2(x^2 + y^2 + z^2) = 2(xy + xz + yz)$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xz - 2yz - 2xy = 0$$

$$\Rightarrow (x^2 + y^2 - 2xy) + (y^2 + z^2 - 2yz) + (x^2 + z^2 - 2xz) = 0$$

$$\Rightarrow (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 0$$

$$\Rightarrow x = y, x = z, y = z \Rightarrow \boxed{x = y = z}$$

Σχόλια

- Η πρόταση «αν και μόνον αν» ή «αν-ν» είναι μια έκφραση της ισοδυναμίας, την οποία το ένα μέλος της σχέσης συνεπάγεται το άλλο.
- Η τεχνική που χρησιμοποιήσαμε στην 2) , λέγεται «συμπλήρωση τέλειου τετραγώνου» και είναι πολύ χρήσιμη μέθοδος στην επίλυση των εξισώσεων.

Προβλήματα:

1. Αν x και y είναι πραγματικοί αριθμοί, να δείξετε ότι αν

$$x^3 + y^3 + (x + y)^3 + 30xy = 2000 \text{ τότε } x + y = 10$$

(JBMO 2000)

2. Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$\begin{cases} a^3 + 1 + 3ab = b^3 \\ 1 + a^5 = b^5 \end{cases}$$

(Πρώτος γύρος Περσικής Ολυμπιάδας)

3. Να λύσετε την εξίσωση στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

$$(5x - 10)^3 + (4 - 2x)^3 + (6 - 3x)^3 = 0$$

4. Αν a και b είναι διαδοχικοί θετικοί ακέραιοι να δείξετε ότι:

$$a^2 + b^2 + (ab)^2 \text{ είναι τέλειο τετράγωνο.}$$

(Πρώτος γύρος Περσικής Ολυμπιάδας)

5. Αν x και y είναι πραγματικοί αριθμοί έτσι ώστε:

$$(x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 1, \text{ να δείξετε ότι } x + y = 0$$

(Πρώτος γύρος Περσικής Ολυμπιάδας)

6. Αν a, b και c είναι πραγματικοί αριθμοί έτσι ώστε $a + b + c = 0$, να δείξετε ότι:

$$\frac{a^3(a+c)(a+b)}{(a-c)(a-b)} + \frac{b^3(b+a)(b+c)}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^3(c+a)(c+b)}{(c-a)(c-b)} = abc$$

(Βιβλίο Μαθηματική Σχολή Περσίας)

7. Να λύσετε την εξίσωση στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

$$(x^2 + 1)(y^2 + 1) = 4(x + y - 1)$$

8. Να λύσετε το σύστημα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

(Μαθηματική Ολυμπιάδα Καναδά)

$$\begin{cases} x = \frac{4z^2}{1 + 4z^2} \\ y = \frac{4x^2}{1 + 4x^2} \\ z = \frac{4y^2}{1 + 4y^2} \end{cases}$$

9. Αν x και y είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί έτσι ώστε

$$x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + 4 = 2(\sqrt{2x+1} + \sqrt{2y+1}),$$

να βρείτε την τιμή της παράτασης: $E = \frac{x}{\sqrt{2x+1}} + \frac{y}{\sqrt{2y+1}}$

(Βιβλίο Μαθηματική Σχολή Περσίας)

Λύσεις:

1. $x^3 + y^3 + (x + y)^3 + 30xy = 2000$

$$\Rightarrow 2(x + y)^3 + 30xy - 3xy(x + y) - 2000 = 0$$

$$\Rightarrow 2((x + y)^3 - 10^3) + 3xy(10 - (x + y)) = 0$$

$$\Rightarrow (x + y - 10)((x + y)^2 + 10(x + y) + 100) - 3xy(x + y - 10) = 0$$

$$\Rightarrow (x + y - 10)((x + y)^2 + 10x + 10y - 3xy) = 0$$

Αν,

$$(x + y)^2 + 10x + 10y - 3xy = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 2xy + 2y^2 + 20x + 20y + 200 = 0$$

$$\Rightarrow (x^2 - 2xy + y^2) + (x^2 + 20x + 100) + (y^2 + 20y + 100) = 0$$

$$\Rightarrow (x - y)^2 + (x + 10)^2 + (y + 10)^2 = 0$$

$$\Rightarrow x = y = -10$$

Άτοπο, αφού οι αριθμοί είναι θετικοί .

Άρα, $x + y = 10$

2. Από την ταυτότητα Euler

$$\begin{aligned}a^3 + 1 + 3ab = b^3 &\Rightarrow a^3 + 1 + 3ab - b^3 = 0 \\&\Rightarrow (1 + a - b)(1 + a^2 + b^2 - a + ab + b) = 0 \\&\Rightarrow \frac{(1 + a - b)((1 - a)^2 + (1 + b)^2 + (a + b)^2)}{2} = 0\end{aligned}$$

$$\text{Αν } ((1 - a)^2 + (1 + b)^2 + (a + b)^2) = 0$$

$$\Rightarrow a = 1, \quad b = -1$$

Και αν $1 + a = b$ από την δεύτερη εξίσωση έχουμε

$$\begin{aligned}1 + a^5 &= (1 + a)^5 \\&\Rightarrow 1 + a^5 = a^5 + 5a^4 + 10a^3 + 10a^2 + 5a + 1 \\&\Rightarrow 5(a^4 + 2a^3 + 2a^2 + a) = 0 \\&\Rightarrow a(a^3 + 2a^2 + 2a + 1) = 0 \\&\Rightarrow a[(1 + a^3) + 2a(1 + a)] = 0 \\&\xrightarrow{1+a^3=(1+a)(a^2-a+1)} a(1 + a)(a^2 + a + 1) \\&\Rightarrow a(1 + a)(2a^2 + 2a + 2) = 0 \\&\Rightarrow a(a + 1)((a + 1)^2 + a^2 + 1) = 0 \\&\Rightarrow a = 0 \text{ ή } a = -1 \\&\Rightarrow (a, b) \in \{(1, -1), (-1, 0), (0, 1)\}\end{aligned}$$

3. **Λήμμα** Αν a, b και c είναι πραγματικοί αριθμοί έτσι ώστε $a + b + c = 0$ και $a^3 + b^3 + c^3 = 0$, τότε $abc = 0$.

Απόδειξη: Από την ταυτότητα Euler

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = 0$$

έτσι $abc = 0$

Χρησιμοποιώντας το λήμμα έχουμε:

$$(5x - 15)^3 + (12 - 2x)^3 + (3 - 3x)^3 = 0$$

$$\text{και } (5x - 15) + (12 - 2x) + (3 - 3x) = 0$$

$$\text{τότε, } (5x - 15)(12 - 2x)(3 - 3x) = 0.$$

$$\text{Άρα, } 5x - 15 = 0 \text{ ή } 12 - 2x = 0 \text{ ή } 3 - 3x = 0$$

$$\text{Δηλαδή } x = 3, x = 6 \text{ ή } x = 1$$

4. Αφού a και b είναι διαδοχικοί θετικοί ακέραιοι $\Rightarrow b = a + 1$

$$\begin{aligned} \Rightarrow a^2 + b^2 + a^2b^2 &= a^2 + (a + 1)^2 + (a(a + 1))^2 \\ &= 2a^2 + 2a + 1 + [a(a + 1)]^2 = 1 + 2a(a + 1) + [a(a + 1)]^2 \\ &= [a(a + 1) + 1]^2 \end{aligned}$$

5. Αφού $(x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 1$

$$\Rightarrow (x + \sqrt{x^2 + 1}) = \frac{1}{(y + \sqrt{y^2 + 1})} = \sqrt{y^2 + 1} - y$$

$$\Rightarrow x + y = \sqrt{y^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 1}$$

$$\Rightarrow (x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2 - 2(\sqrt{y^2 + 1})(\sqrt{x^2 + 1})$$

$$\Rightarrow 1 - xy = (\sqrt{y^2 + 1})(\sqrt{x^2 + 1})$$

$$\Rightarrow (y^2 + 1)(x^2 + 1) = (1 - xy)^2 = 1 + x^2y^2 - 2xy$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = -2xy \Rightarrow (x + y)^2 = 0 \Rightarrow \boxed{x + y = 0}$$

6. Αφού $a + b + c = 0$, έχουμε $a + b = -c$,
 $b + c = -a$ και $c + a = -b$

Τότε,

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{a^3(a+c)(a+b)}{(a-c)(a-b)} + \frac{b^3(b+a)(b+c)}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^3(c+a)(c+b)}{(c-a)(c-b)} \\
 &= \frac{a^3bc}{(a-c)(a-b)} + \frac{b^3ab}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^3ab}{(c-a)(c-b)} \\
 &= abc \left[\frac{a^2}{(a-c)(a-b)} + \frac{b^2}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)} \right] \\
 &= abc \left[\frac{a^2(c-b) + b^2(a-c) + c^2(b-a)}{(c-a)(a-b)(b-c)} \right] \\
 &= abc \left[\frac{a^2(c-b) + b^2(a-c) + c^2(b-a) + abc - abc}{(c-a)(a-b)(b-c)} \right] \\
 &= abc \left[\frac{-ac(c-a) + ab(c-a) - b^2(c-a) + bc(c-a)}{(c-a)(a-b)(b-c)} \right] \\
 &= abc \left[\frac{(c-a)(a-b)(b-c)}{(c-a)(a-b)(b-c)} \right] = abc
 \end{aligned}$$

7. Η εξίσωση γράφεται

$$x^2y^2 + x^2 + y^2 + 1 - 4x - 4y + 4 = 0$$

$$\Rightarrow x^2y^2 + x^2 + y^2 + 1 - 4x - 4y + 4 - 2xy + 2xy = 0$$

$$\Rightarrow (xy - 1)^2 + (x + y - 2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow xy = 1, \quad x + y = 2 \xrightarrow{x=2-y} x(2-x) = 1$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x - 1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow x = 1 \Rightarrow \boxed{(x, y) = (1, 1)}$$

8. Το σύστημα γράφεται
$$\begin{cases} \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{4z^2} \\ \frac{1}{y} = 1 + \frac{1}{4x^2} \\ \frac{1}{z} = 1 + \frac{1}{4y^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3 + \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{4y^2} + \frac{1}{4z^2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left[\left(\frac{1}{2x} \right)^2 + 1 - \frac{1}{x} \right] + \left[\left(\frac{1}{2y} \right)^2 + 1 - \frac{1}{y} \right] + \left[\left(\frac{1}{2z} \right)^2 + 1 - \frac{1}{z} \right] &= 0 \\ \Rightarrow \left(\frac{1}{2x} - 1 \right)^2 + \left(\frac{1}{2y} - 1 \right)^2 + \left(\frac{1}{2z} - 1 \right)^2 &= 0 \\ \Rightarrow x = y = z &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

9. Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + 4 - 2(\sqrt{2x+1} + \sqrt{2y+1}) &= 0 \\ \Rightarrow \left(x + \frac{1}{x} - 2\sqrt{2x+1} + 2 \right) + \left(y + \frac{1}{y} - 2\sqrt{2y+1} + 2 \right) &= 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{x}(x^2 + 1 - 2x\sqrt{2x+1} + 2x) + \frac{1}{y}(y^2 + 1 - 2y\sqrt{2y+1} + 2y) &= 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{x}(x - \sqrt{2x+1})^2 + \frac{1}{y}(y - \sqrt{2y+1})^2 &= 0 \end{aligned}$$

Οι αριθμοί $\frac{1}{x}$ και $\frac{1}{y}$ είναι θετικοί, άρα

$$x = \sqrt{2x+1}, \quad y = \sqrt{2y+1}$$

Δηλαδή, $E = 1 + 1 = 2$.

2

Πολυώνυμα

Ορισμός : Ένα πολυώνυμο είναι μια παράσταση με μη-αρνητικούς ακέραιους εκθέτες.

$f(x) = 2x^{34} - 5x^7 + 2x + \alpha$ είναι πολυώνυμο αλλά,

$\varphi(x) = 3x^{-2} + 34x + 1 = \frac{3}{x^2} + 34x + 1$ δεν είναι πολυώνυμο και

$P(x) = \sqrt[3]{x+5} + 5 = (x+5)^{\frac{1}{3}} + 5$ δεν είναι πολυώνυμο.

Βαθμός ενός πολυωνύμου ως προς μια ή περισσότερες μεταβλητές, είναι ο μεγαλύτερος από τους βαθμούς των όρων του ως προς τη μεταβλητή ή τις μεταβλητές αυτές. Βαθμός ενός πολυωνύμου είναι ο μεγαλύτερος από τους βαθμούς των όρων του ως προς όλες τις μεταβλητές του.

Θεώρημα 1: Ευκλείδεια διαίρεση πολυώνυμων

Αν $p(x)$ και $d(x)$ είναι πολυώνυμα, τότε υπάρχουν μοναδικά πολυώνυμα $q(x)$ και $r(x)$ τέτοια ώστε: $p(x) = d(x)q(x) + r(x)$.

Λήμμα:

$p(x)$ διαρέται με $d(x)$ αν $r(x)$ διαρέται με $d(x)$

Ορισμός: Οι ρίζες του πολυώνυμου είναι παραστάσεις για τις οποίες η τιμή του πολυώνυμου ισούται με 0. Δηλαδή, αν α είναι ρίζα του πολυώνυμου $p(x)$ τότε $p(\alpha) = 0$.

Θεώρημα 2 (Bezout): Αν α είναι ρίζα του πολυώνυμου $p(x)$ τότε $p(x)$ διαιρείται με $x - \alpha$.

Εξισώσεις δευτέρου βαθμού

Ένα πολυώνυμο της μορφής $p(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ ονομάζεται πολυώνυμο δευτέρου βαθμού.

Οι ρίζες του πολυωνύμου είναι:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ και το πολυώνυμο}$$

$f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ γράφεται:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$\Delta = \sqrt{b^2 - 4ac} \text{ λέγεται η διακρίνουσα.}$$

Αν $\Delta > 0$ το πολυώνυμο έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες.

Αν $\Delta = 0$ το πολυώνυμο έχει μια πραγματική ρίζα $\frac{-b}{2a}$

Αν $\Delta < 0$ το πολυώνυμο δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Παράδειγμα 1 Να βρείτε όλους τους ακέραιους α έτσι ώστε το πολυώνυμο $p(x) = ax^2 + 6x + \alpha + 8$ έχει 2 πραγματικές ρίζες.

Λύση

$$\Delta = 36 - 4\alpha(\alpha + 8) > 0 \Rightarrow (1 - \alpha)(\alpha + 9) > 0$$

$$\Rightarrow 1 > \alpha > -9$$

Αλλά $\alpha \neq 0$, αφού το πολυώνυμο πρέπει να είναι δευτέρου βαθμού (πρέπει να έχει 2 πραγματικές ρίζες). Έτσι $\alpha \in \{-1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8\}$.

Θεώρημα 3 (Vieta)

Για κάθε πολυώνυμο $P(x) = ax^2 + bx + c$ οι ρίζες x_1, x_2 ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Επίσης, για κάθε πολυώνυμο, $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ οι ρίζες x_1, x_2, x_3 ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}, \quad x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{c}{a}, \quad x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}$$

Παράδειγμα 2 Αν α, β, γ είναι οι ρίζες του $P(x) = x^3 + 2x^2 - x + 1$, να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$

Λύση: Από Vieta,

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{2}{1} = -2, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{-1}{1} = -1, \quad \alpha\beta\gamma = -\frac{1}{1} = -1$$

Από την ταυτότητα Euler

$$\begin{aligned} & \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 \\ &= (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha) + 3\alpha\beta\gamma \end{aligned}$$

Επίσης,

$$\begin{aligned} & \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha \\ &= (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 3(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = 7 \end{aligned}$$

$$\text{Έτσι, } \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = (-2) \cdot 7 - (3) \cdot (-1) = -17$$

Θεώρημα 4 (Θεμελιώδες Θεώρημα Άλγεβρας)

Κάθε πολυώνυμο γράφεται στην μορφή

$$p(x) = a_n(x - \rho_1)(x - \rho_2) \dots (x - \rho_n)$$

Όπου $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ είναι ρίζες του πολυώνυμου και αν το πολυώνυμο έχει άπειρες ρίζες, τότε $p(x) = 0$.

Παράδειγμα 3 Να βρείτε όλα τα πολυώνυμα $p(x)$, έτσι ώστε:

$$(x + 1) \cdot p(x - 1) = (x - 1) \cdot p(x + 1) \text{ για κάθε πραγματικό αριθμό } x.$$

Λύση:

$$\text{Αν } x = \pm 1 \Rightarrow 2p(0) = 0 \Rightarrow p(0) = 0$$

Από το Θεμελιώδες Θεώρημα Άλγεβρας

$$p(x) = a_n(x - 0)(x - \rho_2) \dots (x - \rho_n) \Rightarrow \boxed{p(x) = x \cdot q(x)}$$

$$(x+1) \cdot p(x-1) = (x-1) \cdot p(x+1)$$

$$\Rightarrow (x+1)(x-1) \cdot q(x-1) = (x+1)(x-1) \cdot q(x+1)$$

$$\xrightarrow{x \neq \pm 1} q(x-1) = q(x+1) \Rightarrow q(x) = q(x+2)$$

Αν $q(0) = n$, τότε

$$q(0) = q(0+2) = q(0+4) = \dots = n$$

Θέτουμε $g(x) = p(x) - c$, έτσι $g(x) = 0$ για άπειρες τιμές του $x = 2k$, δηλαδή από το Θεμελιώδες Θεώρημα Άλγεβρας

$$g(x) = 0 \Rightarrow q(x) = c$$

Άρα, $\boxed{p(x) = cx}$ για $c \in \mathbb{R}$

Προβλήματα

1. Αν το πολυώνυμο $A(x) = ax^3 + bx + c$ διαιρείται με το πολυώνυμο $B(x) = x^2 + tx + 1$, να δείξετε ότι $a^2 - c^2 = ab$

(Πρώτος γύρος Περσικής Ολυμπιάδας)

2. Έστω a ένας θετικός πραγματικός αριθμός έτσι, ώστε $a^3 = 6(a+1)$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2 + ax + a^2 - 6 = 0$ δεν έχει λύσεις στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

(JBMO 2007)

3. Να την εξίσωση στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

$$\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x + \left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^x = 8$$

(Πρώτος γύρος Περσικής Ολυμπιάδας)

4. Αν a, b, c είναι οι ρίζες του $p(x) = x^3 - x + 1$, να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1}$$

(Χάρβαρντ-M.I.T 2009)

5. Να βρείτε όλα τα πολυώνυμα $p(x)$, έτσι ώστε: $p(2x) = p(x) + 2$

Λύσεις

1. Αφού το πολυώνυμο $A(x) = ax^3 + bx + c$ διαιρείται με το πολυώνυμο $B(x) = x^2 + tx + 1$, έχουμε ότι

$$ax^3 + bx + c = (x^2 + tx + 1) \cdot Q(x)$$

Αφού $A(x)$ είναι τρίτου βαθμού και $B(x)$ είναι δευτέρου βαθμού, το $Q(x)$ πρέπει να είναι πρώτου βαθμού πολυώνυμο.

$$\text{Έτσι, } ax^3 + bx + c = (x^2 + tx + 1)(mx + n)$$

Δηλαδή,

$$ax^3 + bx + c = mx^3 + (n + mt)x^2 + (m + tn)x + n$$

Τότε έχουμε ότι, $m = a$ και $n = c$

Η σχέση γράφεται

$$bx = (c + at)x^2 + (ct + a)x$$

$$\text{Άρα, } \begin{cases} b = ct + a \\ c + at = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = ct + a \\ t = -\frac{c}{a} \end{cases} \Rightarrow b = c \left(-\frac{c}{a}\right) + a \Rightarrow \boxed{ab = a^2 - c^2}$$

2. Η συνθήκη γράφεται $a^2 = 6 + \frac{6}{a}$.

Έστω ότι η εξίσωση έχει λύση άρα η διακρίνουσα θα είναι θετική ή ίση με το μηδέν.

$$\text{Δηλαδή } \Delta = 3(8 - a^2) \geq 0 \Rightarrow \boxed{a \leq 2\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{1}{a} \geq \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Άρα, $a^2 = 6 + \frac{6}{a} \geq \frac{6}{2\sqrt{2}} + 6 > 8 \Rightarrow \boxed{a > 2\sqrt{2}}$ που είναι άτοπο και συνεπάγεται ότι η εξίσωση δεν έχει πραγματικές λύσεις.

Σχόλιο: Η μέθοδος που χρησιμοποιήσαμε λέγεται μέθοδος της εις άτοπον απαγωγής. Υποθέτουμε ότι το ζητούμενο δεν ισχύει και μετά καταλήγουμε σε άτοπο. Έτσι, το ζητούμενο είναι αληθές.

$$3. \left(\sqrt{4 + \sqrt{15}}\right)^x = a \text{ και } \left(\sqrt{4 - \sqrt{15}}\right)^x = b$$

Έχουμε ότι: $ab = 1$, $a + b = 8$

Τότε, από Vieta, a και b είναι οι ρίζες του πολυώνυμου:

$$p(n) = n^2 - 8n + 1$$

Οι οποίες είναι $n_1 = 4 + \sqrt{15}$

$$n_2 = 4 - \sqrt{15}$$

Άρα, $(\sqrt{4 + \sqrt{15}})^x = 4 \pm \sqrt{15}$

Τώρα αν $(\sqrt{4 + \sqrt{15}})^x = \sqrt{4 + \sqrt{15}}$ έχουμε ότι

$$x = 2$$

Και αν $(\sqrt{4 + \sqrt{15}})^x = 4 - \sqrt{15}$ έχουμε $x = -2$

Δηλαδή $x = \pm 2$

4. Ψάχνουμε για το πολυώνυμο με ρίζες

$$r_1 = a + 1, \quad r_2 = b + 1 \text{ και } r_3 = c + 1$$

Θέτουμε $y = x + 1 \Rightarrow x = y - 1$

Και έχουμε το πολυώνυμο

$$y^3 - 3y^2 + 2y + 1$$

Από Vieta $r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1 = 2$

Και $r_1 r_2 r_3 = -1$

$$\begin{aligned} \text{Αρά } A &= \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \\ &= \frac{r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1}{r_1 r_2 r_3} = -2 \end{aligned}$$

5. Έστω $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

Τότε αφού $p(2x) = p(x) + 2$, πρέπει να έχουμε $2^n a_n = a_n$

Αν $n \neq 0$

Έτσι πρέπει $a_n = 0$

Και με τον ίδιο τρόπο $a_1 = a_2 = \dots = 0$

Αλλά αυτό καταλήγει σε $p(x) = a_0 \Rightarrow n = 0$, άτοπο.

Άρα $n = 0 \Rightarrow p(x) = c \Rightarrow 2c = c + 2 \Rightarrow c = 2 \Rightarrow \boxed{p(x) = 2}$

3

Συναρτήσεις

Ορισμοί: Για δύο σύνολα A και B μπορούμε να συνδέουμε τα στοιχεία και να γράφουμε μία σχέση από ένα σύνολο προς το άλλο. Μια σχέση $A \rightarrow B$, δηλαδή από το σύνολο A προς το σύνολο B λέγεται συνάρτηση, αν κάθε στοιχείο του A συνδέεται με μόνο ένα στοιχείο του συνόλου B . Το σύνολο A αποτελεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης και το σύνολο B ονομάζεται πεδίο τιμών. Συμβολίζουμε μια συνάρτηση με $f(x)$, όπου οι δυνατές τιμές του x είναι το πεδίο ορισμού (σύνολο A) και οι δυνατές τιμές του $f(x)$ είναι το πεδίο τιμών (σύνολο B).

Μία συνάρτηση λέγεται ένα προς ένα, όταν αντιστοιχίζει διαφορετικά στοιχεία του πεδίου ορισμού A σε διαφορετικά στοιχεία του πεδίου τιμών B .

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = x^2$ δεν είναι ένα προς ένα αφού $f(x) = f(-x) = x^2$

Γενικά, η συνάρτηση $f: A \rightarrow B$ είναι ένα προς ένα αν για κάθε $x, y \in A$ έτσι ώστε $f(x) = f(y)$ έχουμε $x = y$.

Παράδειγμα 1 Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^3 + x + 1$ είναι ένα προς ένα.

Λύση: Έστω ότι x και y είναι δύο πραγματικοί αριθμοί έτσι ώστε $f(x) = f(y)$

Έχουμε ότι $x^3 + x + 1 = y^3 + y + 1$

$$\Rightarrow x^3 + x = y^3 + y \Rightarrow x^3 - y^3 = y - x$$

$$\Rightarrow (x - y)(x^2 - xy + y^2) = -(x - y)$$

Τώρα, αν $x \neq y$ πρέπει να έχουμε $x^2 - xy + y^2 = -1$ δηλαδή $x^2 + y^2 + (x - y)^2 = -2$ που είναι άτοπο. Άρα $x = y$, δηλαδή η συνάρτηση είναι ένα προς ένα.

Επίσης μία συνάρτηση $f: A \rightarrow B$ είναι αύξουσα αν για κάθε $x, y \in A$ έτσι ώστε $f(x) \geq f(y)$ έχουμε $x \geq y$ και μία συνάρτηση $f: A \rightarrow B$ είναι φθίνουσα αν για κάθε $x, y \in A$ έτσι ώστε $f(x) \leq f(y)$ έχουμε $x \geq y$.

Η παράγωγος μιας συνάρτησης είναι το σύνολο των ευθειών που είναι εφαπτόμενες στην καμπύλη της συνάρτησης. Η παράγωγος της $f(x)$ συμβολίζεται με $f'(x)$ ή με $\frac{d}{dx}(f)$

Θεώρημα 1:

Ισχύει οι παρακάτω σχέσεις:

- 1) Αν $f(x) = ax^k \Rightarrow f'(x) = akx^{k-1}$
- 2) $\frac{d}{dx}(f(x) \pm g(x)) = f'(x) \pm g'(x)$
- 3) $\frac{d}{dx}(f(x) \cdot g(x)) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$
- 4) $\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$
- 5) $\frac{d}{dx}(g(f(x))) = g'(f(x))f'(x)$

Θεώρημα 2: Δίνεται η συνάρτηση $f(x)$.

Αν $f'(x) \geq 0$ τότε f είναι αύξουσα.

Αν $f'(x) \leq 0$ τότε f είναι φθίνουσα.

Η τιμή του x για την οποία $f'(x) = 0$, είναι η τιμή που δίνει η μέγιστη η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης. Αν $f''(x) > 0$ τότε αυτή η τιμή είναι ελάχιστη.

Αν $f''(x) < 0$ αυτή η τιμή είναι μέγιστη.

Παράδειγμα 2 Αν a και b είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί έτσι ώστε

$$\frac{\sqrt{a^2+a+1}}{(a+1)^3} \geq \frac{\sqrt{b^2+b+1}}{(b+1)^3}.$$

Να δείξετε ότι $a \leq b$

Λύση: Έστω $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(x+1)^3}$ όπου $x \in \mathbb{R}^+ + \{0\}$

έχουμε

$$f'(x) = \frac{\frac{d}{dx}(\sqrt{x^2+x+1}) \cdot (x+1)^3 - \frac{d}{dx}(x+1)^3 \cdot (\sqrt{x^2+x+1})}{(x+1)^6}$$

Αν $A(x) = x^2 + x + 1$ και $B(x) = \sqrt{x}$

Έχουμε $\frac{d}{dx}(\sqrt{x^2+x+1}) = \frac{d}{dx}(B(A(x))) = B'(A(x)) \cdot A'(x)$

$$\text{Και } B'(x) = \frac{d}{dx} \left(x^{\frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{2} \left(x^{-\frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$A'(x) = \frac{d}{dx} (x^2 + x + 1) = 2x + 1$$

$$\text{Έτσι } \frac{d}{dx} (\sqrt{x^2 + x + 1}) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + x + 1}} \cdot 2x + 1 = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2 + x + 1}}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (x+1)^3 &= \frac{d}{dx} (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) \\ &= 3x^2 + 6x + 3 = 3(x+1)^2 \end{aligned}$$

Άρα,

$$f'(x) = \frac{\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2 + x + 1}} \cdot (x+1)^3 - 3(x+1)^2 \cdot \sqrt{x^2 + x + 1}}{(x+1)^6}$$

$$= \frac{\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2 + x + 1}} \cdot (x+1)^3}{(x+1)^6} - \frac{3(x+1)^2 \cdot \sqrt{x^2 + x + 1}}{(x+1)^6}$$

$$= \frac{2x+1}{2(x+1)^3 \cdot \sqrt{x^2 + x + 1}} - \frac{3\sqrt{x^2 + x + 1}}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{(2x+1)(x+1) - 3(x^2 + x + 1)}{2(x+1)^4 \cdot \sqrt{x^2 + x + 1}}$$

$$= -\frac{4x^2 + 3x + 5}{2(x+1)^4 \cdot \sqrt{x^2 + x + 1}}$$

Αφού $x \in \mathbb{R}^+ + \{0\}$ έχουμε ότι $4x^2 + 3x + 5 \geq 0$ και $2(x+1)^4 \cdot \sqrt{x^2 + x + 1} > 0$,
 έτσι $f'(x) < 0$ άρα η συνάρτηση είναι φθίνουσα, δηλαδή όταν
 $f(a) \geq f(b)$ έχουμε $a \leq b$.

4

Ανισότητες

Βασικές ιδιότητες ανισοτήτων:

Για κάθε πραγματικοί αριθμοί a, b, c :

Αν $a \geq b$ και $b \geq c$, τότε $a \geq c$

π.χ. Αν $a \geq b$ και $b > c$, τότε $a > c$

Αν $a \leq b$, τότε $a + c \leq b + c$ και $a - c \leq b - c$

Αν $a \geq b$ και $c > 0$, τότε $ac \geq bc$ και $\frac{a}{c} \geq \frac{b}{c}$.

Αν c είναι αρνητικός, τότε η ανισότητα αντιστρέφεται.

Αν $a \leq b$, τότε $-a \geq -b$

Αν $b \geq a > 0$, τότε $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$ και το αντίστροφο αν a και b είναι αρνητικός.

Όλες τις παραπάνω σχέσεις ισχύουν και για την άλλη φορά .

Παράδειγμα 1 Αν $x, y, z \in (0,3)$ είναι πραγματικοί αριθμοί έτσι ώστε $x^3 + y^3 + z^3 = 6$, να δείξετε ότι: $\frac{y^3-1}{2x+3} + \frac{z^3-1}{2y+3} + \frac{x^3-1}{2z+3} > \frac{1}{3}$

Λύση: Αφού $x, y, z < 3$ έχουμε ότι

$$2x + 3, 2y + 3, 2z + 3 < 9$$

Δηλαδή,

$$\frac{y^3 - 1}{2x + 3} + \frac{z^3 - 1}{2y + 3} + \frac{x^3 - 1}{2z + 3} > \frac{x^3 + y^3 + z^3 - 3}{9} = \frac{1}{3}$$

Η μητέρα των ανισοτήτων είναι : $a^{2n} \geq 0$

Θεώρημα 1: $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$

Απόδειξη: Η ανισότητα γράφεται

$$2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2ab + 2ac + 2bc$$

$$[a - b]^2 + [b - c]^2 + [c - a]^2 \geq 0, \text{ που ισχύει}$$

$$\text{Δηλ. } (a + b + c)^2 \geq 3(ab + ac + bc)$$

Παράδειγμα 2 Αν a, b, c είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί έτσι ώστε

$$a + b + c = 3.$$

Να δείξετε ότι: $ab + ac + bc \geq 3\sqrt{abc}$

Λύση:

$$\text{Έχουμε ότι : } x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz$$

$$\Leftrightarrow (x + y + z)^2 \geq 3(xy + xz + yz)$$

Τώρα αν $x = ab, y = bc$ και $z = ac$

Έχουμε

$$(ab + ac + bc)^2 \geq 3abc(a + b + c) = 9abc$$

$$\Leftrightarrow ab + ac + bc \geq 3\sqrt{abc}$$

Θεώρημα 2: (Ανισότητα AM/GM/HM)

Αν $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, έχουμε ότι:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \dots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n}}$$

$$\text{Όπου } AM = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n}, GM = \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \dots a_n}$$

$$\text{Και } HM = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n}}$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνον αν:

$$a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n$$

Παράδειγμα 3 Αν x, y and z είναι θετικοί αριθμοί, να δείξετε ότι $(x + y)(y + z)(z + x) \geq 8xyz$

Λύση:

Από AM/GM

$$x + y \geq 2\sqrt{xy}, \quad y + z \geq 2\sqrt{yz}, \quad z + x \geq 2\sqrt{xz}$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη έχουμε

$$(x + y)(y + z)(z + x) \geq 8xyz$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνον αν: $x = y = z$

Παράδειγμα 4 Αν x, y and z είναι θετικοί αριθμοί, να δείξετε ότι:

$$\frac{x^3 + y^3 + 1}{x} + \frac{y^3 + z^3 + 1}{y} + \frac{z^3 + x^3 + 1}{z} \geq 3(x + y + z)$$

Λύση:

Από AM/GM

$$x^3 + y^3 + 1 \geq 3xy$$

$$y^3 + z^3 + 1 \geq 3yz$$

$$z^3 + x^3 + 1 \geq 3xz$$

$$\begin{aligned} \text{Και έτσι } A &= \frac{x^3+y^3+1}{x} + \frac{y^3+z^3+1}{y} + \frac{z^3+x^3+1}{z} \\ &\geq \frac{3xy}{x} + \frac{3yz}{y} + \frac{3zx}{z} = 3(x + y + z) \end{aligned}$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνον αν: $x = y = z$

Θεώρημα 3: Ανισότητα Cauchy Schwartz

Για κάθε πραγματικό αριθμό $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ έχουμε ότι:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + \dots + a_nb_n)^2$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνον αν $\frac{a_1}{b_1} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$

Άσκηση 1: Αν a, b, c είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, να δείξετε ότι:

$$(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9$$

Cauchy Schwartz (Titu's lemma)

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n}$$

Παράδειγμα 5 Αν a, b and c είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί να δείξετε ότι:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

Λύση: Από C/S:

$$\begin{aligned} & \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \\ &= \frac{a^2}{ab+ca} + \frac{b^2}{bc+ab} + \frac{c^2}{ca+bc} \\ &\geq \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)} \end{aligned}$$

Και $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$ (Θεώρημα 1)

Άρα

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3(ab+bc+ca)}{2(ab+bc+ca)} = \frac{3}{2}$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνον αν $a = b = c$

Ορισμός

Μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα σύνολο, αν η δεύτερη παραγωγή $f'' \geq 0$ για όλες τις τιμές του συνόλου.

f είναι κοίλη αν $f'' \leq 0$

Θεώρημα 5: Ανισότητα Τζένσεν

Αν η συνάρτηση f είναι κυρτή στο σύνολο των πραγματικών αριθμών και $a_1, a_2, \dots, a_n, x_1, \dots, x_n$ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί έτσι ώστε:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$$

Έχουμε ότι:

$$a_1 \cdot f(x_1) + \dots + a_n \cdot f(x_n) \geq f(a_1 x_1 + \dots + a_n x_n)$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνον αν $x_1 = \dots = x_n$

Αν f είναι κοίλη η ανισότητα αντιστρέφεται.

Η ανισότητα είναι πολύ χρήσιμη όταν

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n = \frac{1}{n}$$

Παράδειγμα 6 Αν a, b, c είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί έτσι ώστε $a + b + c = 3$ να δείξετε ότι $\sqrt{3a+1} + \sqrt{3b+1} + \sqrt{3c+1} \leq 6$

Λύση:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{3x+1}$

$$\text{αφού } x > 0 \quad f''(x) = \frac{-9}{4(3x+1)^{\frac{3}{2}}} < 0$$

Τότε f είναι κοίλη και από την ανισότητα Τζένσεν

$$\frac{1}{3}f(a) + \frac{1}{3}f(b) + \frac{1}{3}f(c) \leq f\left(\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c\right)$$

$$\text{Έτσι } f(a) + f(b) + f(c) \leq 3 \left(f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \right)$$

$$\Leftrightarrow f(a) + f(b) + f(c) \leq 3f(1)$$

Δηλαδή,

$$\sqrt{3a+1} + \sqrt{3b+1} + \sqrt{3c+1} \leq 3\sqrt{3+1} = 6$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνον αν $a = b = c = 1$

Τώρα για την κυρτή συνάρτηση $f(x) = x^k$ χρησιμοποιούμε την ανισότητα Τζένσεν και έχουμε

$$\frac{1}{n}f(x_1) + \frac{1}{n}f(x_2) + \dots + \frac{1}{n}f(x_n) \geq f\left(\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}\right)$$

Δηλαδή έχουμε,

$$\frac{x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k}{n} \geq \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right)^k \quad (\text{Ανισότητα δυνάμεων})$$

Μετασχηματισμός

Κάποιες ανισότητες είναι δύσκολες να τις αποδείξεις αμέσως. Σε τέτοιες ανισότητες μπορούμε να αλλάξουμε τις μεταβλητές της. Η συνθήκη του προβλήματος μπορεί να μας βοηθήσει για τον κατάλληλο μετασχηματισμό. Τώρα ας δούμε ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 8

Αν a, b, c είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί έτσι ώστε $abc = 1$ να δείξετε ότι:

$$A = \frac{1}{a+ab} + \frac{1}{b+bc} + \frac{1}{c+ac} \geq \frac{3}{2}$$

(G.M. 2000)

Λύση: Αφού $a \cdot b \cdot c = 1$ μπορούμε να βρούμε τις μεταβλητές $x, y, z > 0$ έτσι ώστε

$$\begin{aligned} a &= \frac{x}{y} \quad b = \frac{z}{x} \quad c = \frac{y}{z} \quad \text{δηλαδή} \\ A &= \frac{1}{\frac{x}{y} + \frac{xz}{xy}} + \frac{1}{\frac{z}{x} + \frac{zy}{zx}} + \frac{1}{\frac{y}{z} + \frac{yx}{yz}} \\ &= \frac{1}{\frac{x+z}{y}} + \frac{1}{\frac{y+z}{x}} + \frac{1}{\frac{x+y}{z}} \\ &= \frac{y}{x+z} + \frac{x}{y+z} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2} \quad (\text{Παράδειγμα 5}) \end{aligned}$$

Σχόλια

1. Αν $abc = 1$, μπορούμε να βρούμε οι μεταβλητές x, y, z έτσι ώστε

$$a = \frac{x}{y} \quad b = \frac{z}{x} \quad c = \frac{y}{z}$$
2. Αν $a + b + c = 1$, μπορούμε να βρούμε μεταβλητές x, y, z έτσι ώστε

$$a = \frac{x}{x+y+z} \quad b = \frac{y}{x+y+z} \quad c = \frac{z}{x+y+z}$$

Προβλήματα

1. Αν a, b, c είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί έτσι ώστε:

$$\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ac} = 1$$

Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{a+c} \quad (\text{JBMO TST})$$

2. Αν $a > b$ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί να δείξετε ότι:

$$\frac{a^4 - b^4}{4b^3} > a - b$$

3. Αν a, b, c είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί να δείξετε ότι:

$$a^7 + b^7 + c^7 \geq abc(a^4 + b^4 + c^4)$$

4. Να βρείτε την μέγιστη τιμή του θετικού ακέραιου λ , έτσι ώστε για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό $a \neq 1$, ισχύει η ανισότητα:

$$a^3 + \frac{1}{a^3} - 2 \geq \lambda \left(a + \frac{1}{a} - 2 \right)$$

(Πρώτος γύρος Περσικής Ολυμπιάδας- Με λίγες αλλαγές)

5. Αν a, b και c είναι θετικοί αριθμοί έτσι ώστε, $abc = 1$ να δείξετε ότι

$$A = \frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

(Διεθνής Ολυμπιάδα IMO)

6. Αν a, b και c είναι θετικοί αριθμοί έτσι ώστε $ab + bc + ac = 3$, να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{c + a^2b^2}{a+b} + \frac{b + a^2c^2}{a+c} + \frac{a + b^2c^2}{b+c}$$

(Βιβλίο Μαθηματική Ολυμπιάδα Περσίας)

7. Να λύσετε το σύστημα στο σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών.

$$\begin{cases} xy + yz + zx = 12 \\ xyz = 2 + x + y + z \end{cases}$$

(Πρώτος γύρος Περσικής Ολυμπιάδας)

8. Αν a, b και c είναι μη-αρνητικοί αριθμοί έτσι ώστε $a^2 + b^2 + c^2 = a + b + c$, να δείξετε ότι

$$\frac{a+1}{\sqrt{a^5+a+1}} + \frac{b+1}{\sqrt{b^5+b+1}} + \frac{c+1}{\sqrt{c^5+c+1}} \geq 3 \quad (\text{JBMO Shortlist})$$

9. Αν a, b και c είναι διαφορετικοί θετικοί ακέραιοι, να δείξετε ότι

$$(a + b + c)(ab + bc + ca - 2) \geq 9abc \quad (\text{JBMO 2017})$$

Λύσεις

1. Από C/S

$$A = \frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{a+c} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)} = \frac{a+b+c}{2}$$

Και από το θεώρημα 1 έχουμε,

$$\sqrt{a^2} + \sqrt{b^2} + \sqrt{c^2} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{ac} + \sqrt{bc}$$

$$\Leftrightarrow a + b + c \geq 1$$

$$\text{Έτσι } A \geq \frac{1}{2} \text{ ή } A_{\min} = \frac{1}{2}$$

με ισότητα αν-ν $a = b = c = 1$

$$2. \quad \frac{a^4 - b^4}{4b^3} > a - b$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a-b)(a+b)(a^2+b^2)}{4b^3} > a-b$$

$$\Leftrightarrow (a+b)(a^2+b^2) > 4b^3$$

$$\Leftrightarrow a^3 + a^2b + ab^2 > 3b^3$$

Αφού $a > b > 0$ έχουμε

$$\begin{cases} a^3 > b^3 \\ a^2b > b^2 \cdot b = b^3 \\ ab^2 > b \cdot b^2 = b^3 \end{cases}$$

Προσθέσουμε κατά μέλη και έχουμε το ζητούμενο

3. Από AM/GM

$$\begin{cases} 5a^7 + b^7 + c^7 = a^7 + a^7 + a^7 + a^7 + a^7 + b^7 + c^7 \geq 7a^5bc \\ a^7 + 5b^7 + c^7 = b^7 + b^7 + b^7 + b^7 + b^7 + a^7 + c^7 \geq 7ab^5c \\ a^7 + b^7 + 5c^7 = c^7 + c^7 + c^7 + c^7 + c^7 + b^7 + a^7 \geq 7abc^5 \end{cases}$$

Προσθέσουμε κατά μέλη και έχουμε:

$$7(a^7 + b^7 + c^7) \geq 7abc(a^4 + b^4 + c^4)$$

Δηλαδή $a^7 + b^7 + c^7 \geq abc(a^4 + b^4 + c^4)$

με ισότητα αν-να $a = b = c$

4. Από την ταυτότητα Euler

$$\begin{aligned} a^3 + \frac{1}{a^3} - 2 &= a^3 + \frac{1}{a^3} - 8 + 6 \\ &= a^3 + \frac{1}{a^3} + (-2)^3 - 3(a)\left(\frac{1}{a}\right)(-2) \\ &= \left(a + \frac{1}{a} - 2\right)\left(a^2 + \frac{1}{a^2} + 2\left(a + \frac{1}{a}\right) + 3\right) = \left(a + \frac{1}{a} - 2\right)\left(a + \frac{1}{a} + 1\right)^2 \end{aligned}$$

$$\text{Έτσι } \left(a + \frac{1}{a} - 2\right)\left(a + \frac{1}{a} + 1\right)^2 \geq \lambda\left(a + \frac{1}{a} - 2\right)$$

Από AM/GM έχουμε $a + \frac{1}{a} \geq 2$ με ισότητα αν-ν $a = 1$

Αλλά αφού $a \neq 1$ πρέπει να έχουμε $a + \frac{1}{a} > 2 \Leftrightarrow a + \frac{1}{a} - 2 > 0$

$$\text{Τότε } \lambda \leq \left(a + \frac{1}{a} + 1\right)^2$$

Όμοια από AM/GM $a + \frac{1}{a} > 2$

$$\Leftrightarrow \left(a + \frac{1}{a} + 1\right)^2 > 9$$

Δηλαδή $\lambda < 9$ ή $\lambda_{max} = 8$

5. Αφού $abc = 1$, πολλαπλασιάζουμε το A με abc , και έχουμε

$$A = \frac{(ab)^2}{ab + ac} + \frac{(bc)^2}{bc + ab} + \frac{(ac)^2}{ac + bc}$$

$$\text{Από C/S } A \geq \frac{(ab+ac+bc)^2}{2(ab+ac+bc)} = \frac{ab+ac+bc}{2}$$

$$\text{Και από AM/GM: } A \geq \frac{3\sqrt[3]{(abc)^2}}{2} = \frac{3}{2}$$

Άρα, $A \geq \frac{3}{2}$ με ισότητα αν-ν $a = b = c = 1$

$$6. \quad A = \frac{c+a^2b^2}{a+b} + \frac{b+a^2c^2}{a+c} + \frac{a+b^2c^2}{b+c}$$

$$= \frac{a^2}{ab+ac} + \frac{b^2}{ba+bc} + \frac{c^2}{cb+ca} + \frac{(ab)^2}{a+b} + \frac{(bc)^2}{b+c} + \frac{(ca)^2}{c+a}$$

Από C/S (δύο φορές)

$$A \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+ac+bc)} + \frac{(ab+ac+bc)^2}{2(a+b+c)}$$

$$\Leftrightarrow A \geq \frac{(a+b+c)^2}{6} + \frac{9}{2(a+b+c)} : (1)$$

Και από AM/GM:

$$\frac{(a+b+c)^2}{6} + \frac{9}{2(a+b+c)} \geq 2\sqrt{\frac{9(a+b+c)}{12}}$$

$$= \sqrt{3(a+b+c)}$$

$$\text{Επίσης } (a+b+c)^2 \geq 3(ab+ac+bc)$$

$$\Rightarrow a+b+c \geq 3$$

Τότε $A \geq 3$ ή $A_{\min} = 3$ με ισότητα αν-ν

$$a = b = c = 1$$

7. Από AM/GM

$$xy + yz + zx \geq 3\sqrt[3]{xy \cdot yz \cdot zx}$$

$$\Rightarrow 12 \geq 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2} \Rightarrow xyz \leq 8$$

Επίσης από AM/GM

$$2 + x + y + z \geq 4\sqrt[4]{2xyz}$$

$$\Rightarrow xyz \geq 4\sqrt[4]{2xyz} \Rightarrow xyz \geq 8$$

Έτσι $xyz = 8$, δηλαδή ισχύει η ισότητα. Αφού χρησιμοποιήσαμε AM/GM, η ισότητα ισχύει αν-ν $x = y = z$

Άρα $(x, y, z) = (2, 2, 2)$

8. Έχουμε ότι

$$x^5 + x + 1 = (x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1)$$

Και από AM/GM

$$\sqrt{(a^2 + a + 1)(a^3 - a^2 + 1)}$$

$$\leq \frac{(a^2 + a + 1) + (a^3 - a^2 + 1)}{2}$$

$$= \frac{\alpha^3 + \alpha + 2}{2} = \frac{(\alpha + 1)(\alpha^2 - \alpha + 2)}{2}$$

Έτσι

$$A \geq \frac{2}{\alpha^2 - \alpha + 2} + \frac{2}{b^2 - b + 2} + \frac{2}{c^2 - c + 2}$$

Από C/S

$$\frac{A}{2} \geq \frac{(1 + 1 + 1)^2}{\alpha^2 + b^2 + c^2 - \alpha - b - c + 6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

Άρα $A \geq 3$ με ισότητα αν-ν

$$x = y = z = 0 \text{ ή } 1$$

9. Ας δούμε και ένα διαφορετικό θέμα.

Χωρίς βλάβη τις γενναιότητας θέτουμε

$$x > y > z$$

Αφού διαφορετικοί θετικοί ακέραιοι έχουν τουλάχιστον διαφορά 1, θέτουμε

$$x = a + 2, y = b + 1, z = c \text{ και έχουμε}$$

$$a \geq b \geq c : (1)$$

Τώρα η ανισότητα γράφεται

$$(a + b + c + 3)(ab + bc + ca + 3c + 2b + a) \geq 9(abc + 2bc + ca + 2c)$$

Από την ανισότητα AM/GM (Παράδειγμα 3) έχουμε

$$(a + b + c)(ab + bc + ca) = (a + b)(b + c)(c + a) + abc \geq 8abc + abc = 9abc$$

Αρκεί να δείξουμε ότι

$$6ab + a^2 + 2b^2 + 3c^2 + 6b + 3a \geq 10bc + 2ac + 9c : (2)$$

Τώρα από την AM/GM και την σχέση (1), έχουμε

$$a^2 + c^2 \geq 2ac, \quad 2b^2 + 2c^2 \geq 4bc,$$

$$6ab \geq 6bc \text{ και } 6b + 3a \geq 9c$$

Προσθέτουμε κατά μέλη και έχουμε την σχέση (2), δηλαδή το ζητούμενο.

Η ισότητα ισχύει αν-ν $a = b = c$, δηλαδή όταν x, y και z είναι διαδοχικοί.

Ενότητα Β

$$a - b | a^n - b^n$$

$$a^p \equiv a \pmod{p}$$

$$n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Θεωρία Αριθμών

1

Διαιρετότητα, ΜΚΔ και ΕΚΠ

Θεώρημα 1 : (Ευκλείδειας διαίρεση)

Για κάθε ακέραιο a και b υπάρχουν μοναδικοί ακέραιοι q και r έτσι ώστε $a = bq + r$

$$(0 \leq r < |b|)$$

Όπου r είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του a με b

Για παράδειγμα: $-17 = 4 \cdot -5 + 3$

Οι αριθμοί a που φέρνουν υπόλοιπο 3 όταν διαιρεθούν με 5 είναι της μορφής $a = 5k + 1$, όπου k είναι ακέραιος.

Ορισμός: Ένας αριθμός b διαιρεί το αριθμό a αν το κλάσμα $\frac{a}{b}$ είναι ακέραιος, δηλαδή $a = bk$, για κάποιο ακέραιο k . Στην θεωρία αριθμών γράφουμε $b|a$, όταν b διαιρεί το a

Παράδειγμα 1 Να δείξετε ότι το τετράγωνο κάθε περιττού ακέραιου γράφεται στη μορφή $8a + 1$

Λύση: Θέτουμε $N = 2k + 1$ ένας περιττός ακέραιος

$\Rightarrow N^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k + 1) + 1$. Το γινόμενο $k(k + 1)$ είναι άρτιο, αφού ένα από τα k και $k + 1$ είναι άρτιο. Έτσι $k(k + 1) = 2\alpha$ και

$$N^2 = 4 \cdot 2\alpha + 1 = 8\alpha + 1$$

Θεώρημα 2: (Βασικές ιδιότητες Διαιρετότητας)

Αν a, b, c, d, k είναι θετικοί ακέραιοι τότε ισχύουν οι ιδιότητες:

- 1) Αν $a|b \Rightarrow -a|b$, $a|-b$ και $-a|-b$
- 2) Αν $a|b \Rightarrow a|bk$
- 3) Αν $a|b \Rightarrow \leq |b|$
- 4) Αν $a|1 \Rightarrow a = \pm 1$
- 5) Αν $a|b$ και $c|d \Rightarrow ac|bd$
- 6) Αν $k|a$ και $k|b \Rightarrow k|ac \pm bd$
- 7) Αν $a|b \Rightarrow a^n|b^n$ για κάθε θετικό ακέραιο n

Παράδειγμα 2 Να βρείτε όλους τους θετικούς ακέραιους n , έτσι ώστε το κλάσμα $N = \frac{5n+1}{n-1}$ να είναι ακέραιος.

Λύση: Θα βρούμε για ποια n ισχύει ότι $n-1 \mid 5n+1$

Αφού $n-1 \mid n-1$, έχουμε $n-1 \mid 5n-5$

$$\Rightarrow n-1 \mid 5n+1 - (5n-5) = 6$$

Επίσης $6 = 3 \cdot 2 = 6 \cdot 1$ και $n-1 \geq 0$

Άρα έχουμε τις περιπτώσεις

$$n-1 = 1, \quad n-1 = 2, \quad n-1 = 3 \text{ και } n-1 = 6$$

Οπότε $n \in \{2, 3, 4, 7\}$

Ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο και Μέγιστος κοινός διαιρέτης.

Ορισμός: Μέγιστος κοινός διαιρέτης δύο ή περισσότερων φυσικών αριθμών ονομάζεται ο μεγαλύτερος κοινός διαιρέτης d , των αριθμών αυτών.

Ο Μέγιστος κοινός διαιρέτης d των a και b συμβολίζεται με $d = MK\Delta(a, b)$ και ισχύει ότι $d \mid a$, $d \mid b$. Δύο θετικοί ακέραιοι είναι a και b πρώτοι μεταξύ τους (ή σχετικά πρώτοι) αν $MK\Delta(a, b) = 1$.

Παράδειγμα 3 Για τους θετικούς ακέραιους n να δείξετε ότι $MK\Delta(2n+1, n^2+n) = 1$.

Έστω ότι $MK\Delta(2n+1, n^2+n) = d$, έχουμε ότι

$$d \mid 2n+1, d \mid n^2+n \Rightarrow d \mid 2(n^2+n) - n(2n+1) \Rightarrow d \mid n$$

$$\Rightarrow d \mid 2n+1 - 2n \Rightarrow d \mid 1 \Rightarrow d = 1, \text{ δηλαδή το ζητούμενο.}$$

Ορισμός: Ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο δύο ή περισσότερων φυσικών αριθμών ονομάζεται το μικρότερο, μη μηδενικό κοινό πολλαπλάσιο λ των αριθμών αυτών. Το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο δύο φυσικών αριθμών a και b συμβολίζεται με $\lambda = EK\Pi(a, b)$ και ισχύει ότι $a \mid \lambda$, $b \mid \lambda$.

Θεώρημα 2: Αν a και b είναι φυσικοί αριθμοί τότε ισχύει ότι

$$EK\Pi[a, b] \cdot MK\Delta(a, b) = a \cdot b.$$

Προβλήματα

1. Να βρεθούν όλοι οι θετικοί ακέραιοι n έτσι ώστε ο αριθμός $N = \frac{2n+1}{n^2-2}$ να είναι ακέραιος.

2. Να δείξετε ότι το κλάσμα $N = \frac{21n+4}{14n+3}$ είναι ανάγωγο για κάθε θετικό ακέραιο n
(Διεθνής Ολυμπιάδα IMO 1959)

3. Να βρείτε τη μεγαλύτερη δύναμη του 2 που διαιρεί τον αριθμό
 $N = 3^{512} - 1$.

(Πρώτος Γύρος Περσικής Ολυμπιάδας)

4. Έστω a και b θετικοί ακέραιοι, έτσι ώστε
 $\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a}, \frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a}$ επίσης θετικός ακέραιος), να δείξετε ότι:
 $MKD(a, b) \leq \sqrt{a+b}$.

(Πρώτος Γύρος Περσικής Ολυμπιάδας)

5. Αν a, b και c θετικοί ακέραιοι που ικανοποιούν τις σχέσεις :
 $ac = 2012$, $MKD(a, b) = 1$ και $EKP[b, c] = 1390$
Να βρείτε την τιμή του $a + b + c$.

(Πρώτος Γύρος Περσικής Ολυμπιάδας)

6. Να βρεθούν όλοι οι θετικοί ακέραιοι a και b έτσι ώστε οι αριθμοί $\frac{a^3b-1}{a+1}$
και $\frac{b^3a+1}{b-1}$ να είναι επίσης θετικοί ακέραιοι.

(JBMO 2013)

Λύσεις

$$\begin{aligned} 1. \quad \text{Αν } N \text{ ακέραιος, ισχύει ότι } n^2 - 2 \mid 2n + 1 &\Rightarrow n^2 - 2 \mid 2n^2 + n \\ &\Rightarrow n^2 - 2 \mid 2n^2 + n - 2(n^2 - 2) \\ &\Rightarrow n^2 - 2 \mid n + 4 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow n^2 - 2 \mid 2(n + 4) - (2n - 1) \Rightarrow n^2 - 2 \mid 7$$

Δηλαδή έχουμε τις περιπτώσεις:

- $n^2 - 2 = 7 \xRightarrow{n>0} n = 3$
- $n^2 - 2 = 1 \Rightarrow n \notin \mathbb{Z}$
- $n^2 - 2 = -1 \xRightarrow{n>0} n = 1$
- $n^2 - 2 = -7$ είναι αδύνατη

Αρά $n = 1$ και $n = 3$.

$$2. \quad \text{Θέτουμε } d = \text{Μ.Κ.Δ}(21n + 4, 14n + 3)$$

Άρα ισχύει ότι $d \mid 21n + 4$ και $d \mid 14n + 3$ και

$$\begin{aligned} d \mid 3(14n + 3) - 2(21n + 4) \\ \Rightarrow d \mid 21n + 9 - 21n - 8 = 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Μ.Κ.Δ}(21n + 4, 14n + 3) = 1.$$

Άρα το κλάσμα είναι ανάγωγο.

$$3. \quad \text{Έχουμε ότι } N = 3^{512} - 1$$

$$= (3^{256} - 1)(3^{256} + 1) = \dots$$

$$= (3^{256} - 1)(3^{256} + 1) = \dots$$

$$= (3^{256} + 1)(3^{128} + 1) \dots (3^2 + 1)(3^2 - 1)$$

$$= (3^{256} + 1) \dots (3^2 + 1) \cdot 2^3$$

Ισχύει όμως $3^{2^k} + 1$ είναι της μορφής $4a + 2$ και η μεγαλύτερη δύναμη του 2 που το διαιρεί είναι 2^1 και αφού έχουμε 8 παρενθέσεις στην μορφή $3^{2^k} + 1$, η μεγαλύτερη δύναμη του 2 που διαιρεί το N είναι $3 + 8 = 11$.

$$4. \quad \text{Επειδή } \frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a} \text{ είναι θετικός ακέραιος έχουμε: } ab/a^2 + b^2/a + b$$

$$\text{Αν } \text{ΜΚΔ}(a, b) = d \text{ και } a = dx, \quad b = dy$$

$$\text{Έχουμε } d^2xy/d^2x + d^2y + dx + dy \Rightarrow d^2/a + b$$

$$\xRightarrow{a, b > 0} a + b \geq d^2 \Rightarrow \sqrt{a + b} \geq \text{ΜΚΔ}(a, b)$$

5. Έχουμε ότι $c|2012$ και $c|1390$, άρα $c = 1$ ή $c = 2$.

Αν $c = 1$, τότε $a = 2012$ και δεν έχουμε λύση

Αν $c = 2$ τότε $a = 1006$ και έχουμε την λύση

$(a, b, c) = (1006, 695, 2)$, δηλαδή $a + b + c = 1703$.

$$\begin{aligned} 6. \quad a^3b - 1 &= b(a^3 + 1) - (b + 1) \\ &= b(a + 1)(a^2 - a + 1) - (b + 1) \end{aligned}$$

Ισχύει ότι $a + 1|a^3b - 1$ άρα $a + 1|b + 1$

Επίσης, $b^3a + 1 = a(b^3 - 1) + (a + 1) = a(b - 1)(b^2 + b + 1) + (a + 1)$

Έτσι αφού $b - 1|b^3a - 1$ έχουμε

$$b - 1|a + 1$$

Άρα $b - 1|b + 1$, δηλαδή

$$b - 1|b + 1 - (b - 1) = 2$$

Οπότε,

αν $b=2$, έχουμε $a + 1|3$ και έτσι έχουμε την λύση $(a, b) = (2, 2)$

αν $b = 3$, έχουμε $a + 1|4$ και έτσι έχουμε τις λύσεις $(a, b) = (1, 3)$ και $(a, b) = (3, 3)$

2

Πρώτοι Αριθμοί

Ορισμός: Ένας θετικός ακέραιος p λέγεται πρώτος, όταν οι μόνοι του διαιρέτες είναι το 1 και ο εαυτός του. Για παράδειγμα, οι αριθμοί 2,3,5,7,11,13 κ.τ.λ. είναι πρώτοι. Κάθε αριθμός έχει τουλάχιστον έναν πρώτον διαιρέτη.

Θεώρημα 1: Ο μοναδικός άρτιος πρώτος είναι το 2. Γενικά αν p και q είναι πρώτοι αριθμοί έτσι ώστε $p|q^n$, για κάποιο θετικό ακέραιο n , τότε ισχύει ότι $p = q$.

Παράδειγμα 1 Να βρεθούν όλοι οι πρώτοι αριθμοί p έτσι ώστε ο αριθμός $p + 9$ να είναι επίσης πρώτος.

Λύση: Αν p είναι περιττός τότε $p + 9$ είναι άρτιος, επομένως $p + 9 = 2$, πού δεν ισχύει. Άρα ο p είναι άρτιος, οπότε $p = 2$ είναι η μοναδική λύση, όπου

$p + 9 = 11$ είναι επίσης πρώτος.

Παράδειγμα/ Θεώρημα 2: Να δείξετε ότι υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί.

Λύση: Έστω ότι το πλήθος των πρώτων αριθμών είναι πεπερασμένο και $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ είναι όλοι οι πρώτοι αριθμοί που υπάρχουν.

Θεωρούμε ο αριθμός $K = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_n + 1$. Αυτός ο αριθμός έχει τουλάχιστον ένα πρώτο διαιρέτη p_i , και έτσι $p_i | p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_n + 1$. Αλλά αφού $p_i | p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_n$, θα πρέπει να ισχύει ότι $p_i | 1$, δηλαδή $p_i = 1$, που είναι άτοπο. Άρα υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί.

Θεώρημα 3 : (Θεμελιώδες θεώρημα αριθμητικής)

Μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε κάθε θετικό ακέραιο σε γινόμενο πρώτων αριθμών.

Δηλαδή ισχύει ότι,

$$n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$$

οπού p_i είναι πρώτος αριθμός.

Επίσης ισχύει το παρακάτω θεώρημα

$$\tau(n) = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdots (a_n + 1)$$

Όπου τ συμβολίζει ο πλήθος των διαιρετών του n .

Για παράδειγμα ο αριθμός $7000 = 7 \times 2^3 \times 5^3$ έχει $(1+1)(3+1)(3+1) = 32$ διαρέτες.

Προβλήματα

1. Να βρείτε όλους τους θετικούς ακέραιους n έτσι ώστε ο αριθμός $P = n^4 + n^2 + 1$ να είναι πρώτος.
2. Να βρείτε όλους τους πρώτους τριψήφιους αριθμούς $\overline{abc}$ έτσι ώστε $b^2 - 4ac = 9$.
(Πρώτος Γύρος Περσικής Ολυμπιάδας)
3. Να βρεθούν όλοι οι πρώτοι αριθμοί p έτσι ώστε ο αριθμός $8p^2 + 1$ να είναι επίσης πρώτος.
4. Να βρείτε όλους τους τετραψήφιους αριθμούς στην μορφή $\overline{abab}$ που έχουν 14 διαιρέτες.
(Πρώτος Γύρος Περσικής Ολυμπιάδας)
5. Να βρείτε όλους τους θετικούς ακέραιους n έτσι ώστε ο αριθμός $\left\lfloor \frac{n^2}{3} \right\rfloor$ να είναι πρώτος, όπου το $\left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor$ εκφράζει το μεγαλύτερο ακέραιο που είναι μικρότερο ή ίσο με $\frac{m}{n}$.
(Πρώτος Γύρος Περσικής Ολυμπιάδας)

Λύσεις

1. $Av P = n^4 + n^2 + 1$

$$= n^4 + 2n^2 + 1 - n^2 = (n^2 + 1)^2 - n^2 = (n^2 - n + 1)(n^2 + n + 1)$$

Και αφού P είναι πρώτος, πρέπει ένας από τους αριθμούς στο γινόμενο του να είναι 1. Αλλά αφού $n \geq 1$ έχουμε $n^2 + n + 1 \geq 3$ άρα $n^2 - n + 1 = 0$
 $\Rightarrow n(n - 1) = 0 \xrightarrow{n > 0} n = 1$ για την οποία $P = 3$, που είναι πρώτος.

2. Δίνεται το πολυώνυμο

$P(x) = ax^2 + bx + c$ με διακρίνουσα $b^2 - 4ac = 9$ και $a > 0$. Αφού η διακρίνουσα είναι θετική, το πολυώνυμο μπορεί να παραγοντοποιηθεί σε γινόμενο δύο πολυώνυμων πρώτου βαθμού. Άρα, $\overline{abc} = 100a + 10b + c = P(100) = (10p + r)(10q + s)$ που δεν μπορεί να είναι πρώτος.

3. Μια λύση είναι το $p = 3$

Έστω ότι $p \neq 3$, τότε το p^2 είναι της μορφής $3n + 1$.

Επομένως το $8p^2 + 1 = 24n + 9 = 3(8n + 3)$, δηλαδή $3 | 8p^2 + 1$.

$\Rightarrow 8p^2 = 2$ που είναι άτοπο.

Άρα η μοναδική λύση είναι $p = 3$.

4. Έχουμε ότι $\overline{abab} = 101 \cdot \overline{ab} = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$

Έτσι $\tau(\overline{abab}) = 2(a_1 + 1) \cdots (a_k + 1)$

Επίσης $\tau(\overline{abab}) = 14$ και έτσι $\overline{ab} = p^6$ με p πρώτος. Αλλά αφού p_1^6 πρέπει να είναι διψήφιος έχουμε ότι $p_1 = 2$ και άρα

$$\overline{abab} = 6464.$$

5. Λόγω της ευκλείδειας διαίρεσης, έχουμε 3 περιπτώσεις.

Αν $n = 3k$ τότε $3k^2$ πρέπει να είναι πρώτος.

Δηλαδή $k = 1$ ή $n = 3$

Αν $n = 3k + 1$ τότε $3k^2 + 2k = k(3k + 2)$ πρέπει να είναι πρώτος, δηλαδή $k = 1$ ή $n = 4$

Αν $n = 3k + 2$ τότε:

$13k^2 + 4k + 1 = (3k + 1)(k + 1)$ πρέπει να είναι πρώτος, δηλαδή $k + 1 = 1$

$\Rightarrow k = 0$ ή $n = 2$, που απαγορεύεται αφού $\left\lfloor \frac{4}{3} \right\rfloor = 1$ δεν είναι πρώτος. Άρα οι λύσεις

μας είναι $n = 3$ ή $n = 4$ για τις οποίες $\left\lfloor \frac{n^2}{3} \right\rfloor$ να είναι πρώτος.

3

Ισοτιμία

Ορισμός: Δυο ακέραιοι a και b είναι ίσο-υπόλοιποι *modulo* n αν και μόνον αν $n|(a - b)$. Με άλλα λόγια, αφήνουν το ίδιο υπόλοιπο όταν διαιρεθούν με τον θετικό ακέραιο n .

Όταν δυο ακέραιοι a και b έχουν το ίδιο υπόλοιπο *modulo* n συμβολίζονται $a \equiv b(mod\ n)$

π.χ. $5 \equiv -1(mod\ 3)$

Θεώρημα 1: (Βασικές ιδιότητες ισοτιμίας)

Αν a, b, c, d, n και m είναι θετικοί ακέραιοι τότε ισχύουν οι ιδιότητες:

- 1) $a \equiv a(mod\ n)$
- 2) $\text{Αν } a \equiv b(mod\ n) \Rightarrow b \equiv a(mod\ n)$
- 3) $\text{Αν } a \equiv b(mod\ n), c \equiv d(mod\ n)$
 $\Rightarrow a + c \equiv b + d(mod\ n)$
- 4) $\text{Αν } a \equiv b(mod\ n), c \equiv d(mod\ n)$
 $\Rightarrow a - c \equiv b - d(mod\ n)$
- 5) $\text{Αν } a \equiv b(mod\ n), c \equiv d(mod\ n)$
 $\Rightarrow a \cdot c \equiv b \cdot d(mod\ n)$
- 6) $\text{Αν } a \equiv b(mod\ n) \Rightarrow a^k \equiv b^k(mod\ n)$
- 7) $\text{Αν } a \equiv b(mod\ n), a \equiv b(mod\ m) \Rightarrow a \equiv b(mod\ ΕΚΠ[m, n])$

Παράδειγμα 1 Να δείξετε ότι $8 \mid 5^{100} + 7$

Λύση: $5^{22} + 7 \equiv (5^2)^{50} + 7 \equiv 25^{50} + 7 \equiv 1^{50} + 7 \equiv 8 \equiv 0(mod\ 8)$

Άρα $8 \mid 5^{100} + 7$

Παράδειγμα 2 Να βρείτε το ψηφίο των μονάδων του αριθμού

$$A = 2017^{2017} + 20^{20} + 17^{17}$$

Λύση:

Αφού $2017 \equiv 7 \pmod{10}$, $17 \equiv 7 \pmod{10}$ και $20 \equiv 0 \pmod{10}$

Έχουμε ότι $A \equiv 7^{2017} + 0^{20} + 7^7$

Τώρα αφού $7^2 = 49 \equiv -1 \pmod{10}$ έχουμε ότι $7^4 \equiv 1 \pmod{10}$

$$\begin{aligned}\text{Έτσι } A &\equiv 7^{2017} + 0^{20} + 7^7 \equiv 7 \cdot (7^4)^{504} + 0 + 7^3 \cdot 7^4 \equiv 7 \cdot 1 + 7^3 \cdot 1 \\ &\equiv 343 + 7 \equiv 0 \pmod{10}\end{aligned}$$

Άρα το ψηφίο των μονάδων του A είναι 0.

Ορισμός: Για κάθε θετικό ακέραιο n , το πλήθος των αριθμών που είναι σχετικά πρώτοι με τον n συμβολίζεται με $\varphi(n)$, και ονομάζεται η συνάρτηση φ του Euler.

Παράδειγμα 3 Να βρείτε την τιμή του $\varphi(p)$ για τον πρώτο αριθμό p

Λύση: $\varphi(p) = p - 1$ αφού το σύνολο

$\Sigma = \{1, 2, \dots, p-1\}$ είναι όλοι πρώτοι με τον p .

Θεώρημα 2 Έστω $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_k^{a_k}$ με $p_1, p_2, \dots, p_k$ πρώτοι αριθμοί τότε
$$\varphi(n) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

Θεώρημα 3 (Θεώρημα Euler) : Έστω a είναι ακέραιος και n θετικός ακέραιος με $\text{MKΔ}(a, n) = 1$, τότε $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$

Από το θεώρημα Euler είναι προφανώς ότι :

Θεώρημα 4 : (Μικρό θεώρημα του Fermat)

$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ για a είναι ακέραιο και p πρώτος έτσι ώστε

$$\text{ΚΔ}(a, p) = 1$$

Παράδειγμα 4 Έστω p είναι πρώτος αριθμός, να δείξετε ότι:

$$1^{p-1} + 2^{p-1} + \dots + (p-1)^{p-1} \equiv -1 \pmod{p}$$

Λύση:

Από το μικρό θεώρημα Fermat (αφού το σύνολο $\Sigma = \{1, 2, \dots, p-1\}$ είναι όλοι πρώτοι με τον p) έχουμε ότι:

$$1^{p-1} + 2^{p-1} + \dots + (p-1)^{p-1} \equiv \overbrace{1 + 1 + \dots + 1}^{p-1} \equiv p-1 \equiv -1 \pmod{p}$$

Προβλήματα

1. Αν a και b είναι ακέραιοι έτσι ώστε ο αριθμός $N = \frac{a^2+b^2}{7}$ να είναι ακέραιος, να δείξετε ότι $a \equiv b \equiv 0 \pmod{7}$.

2. Αν a, b και c είναι ακέραιοι έτσι ώστε $a + b + c \equiv 0 \pmod{13}$ και $abc \not\equiv 0 \pmod{13}$ να δείξετε ότι $a^{2017} + b^{2017} + c^{2017} \equiv 0 \pmod{13}$.

3. Για κάθε πρώτο αριθμό $p \geq 7$ να δείξετε ότι ο αριθμός $N = \frac{\overbrace{111\dots 1}^{p-1}}{p}$ είναι ακέραιος.

Σημείωση: Στις παρακάτω ασκήσεις $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$.

4. Να βρεθούν όλοι οι ακέραιοι n έτσι ώστε $n! + 3 = 3^{n-1}$.

(Πρώτος γύρος Περσικής Ολυμπιάδας)

5. Να βρεθούν όλοι οι θετικοί ακέραιοι n έτσι ώστε ο αριθμός $N = 1! + 2! + \dots + n!$ να είναι τέλειο τετράγωνο ακέραιου.

(Πρώτος Γύρος Περσικής Ολυμπιάδας)

6. Να βρείτε τα δύο τελευταία ψηφία του αριθμού $2^{100} + 12$.

(Πρώτος Γύρος Περσικής Ολυμπιάδας με λίγες αλλαγές)

Λύσεις

1. Για κάθε ακέραιο x , ισχύει ότι

$$x \equiv 0, \pm 1, \pm 2 \text{ ή } \pm 3 \pmod{7} \Rightarrow x^2 \equiv 0, 1, 2 \text{ ή } 4 \pmod{7} : (1)$$

Αν $7|a$, τότε $7|b$, δηλαδή το ζητούμενο.

Τώρα, ας υποθέσουμε ότι $7 \nmid ab$ χρησιμοποιούμε την σχέση (1) και εξετάζουμε όλες τις περιπτώσεις για τις οποίες $a, b \not\equiv 0 \pmod{7}$

Σε κάθε περίπτωση ισχύει ότι $a^2 + b^2 \not\equiv 0 \pmod{7}$, που είναι άτοπο.

Άρα θα πρέπει να ισχύει ότι $7|a \Rightarrow 7|b$, δηλαδή το ζητούμενο.

2. Από το θεώρημα Fermat έχουμε

$$x^{2017} = x \cdot x^{2016} = x \cdot (x^{12})^{168} \equiv x \pmod{13}, \text{ αν } MK\Delta(13, x) = 1$$

Αφού $abc \not\equiv 0 \pmod{13}$ ισχύει ότι

$$13 \nmid a, 13 \nmid b \text{ και } 13 \nmid c$$

$$\text{Δηλαδή } MK\Delta(13, a) = MK\Delta(13, b) = MK\Delta(13, c) = 1$$

Έτσι,

$$a^{2017} + b^{2017} + c^{2017} \equiv a + b + c \equiv 0 \pmod{13}$$

$$3. \text{ Αν } N = \frac{\overbrace{111\dots 1}^{p-1}}{p} = \frac{10^{p-1}-1}{9p}$$

Αφού $p \geq 7$, τότε πρέπει να ισχύει ότι $MK\Delta(9, p) = MK\Delta(3, p) = 1$

Και έτσι από το θεώρημα Fermat

$$10^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow p | 10^{p-1} - 1 : (1)$$

$$\text{Επίσης γνωρίζουμε ότι } 10^{p-1} \equiv 1^{p-1} \equiv 1 \pmod{9} \Rightarrow 9 | 10^{p-1} - 1 : (2)$$

Τώρα αφού $MK\Delta(9, p) = 1$, από τις σχέσεις (1) και (2) συνεπάγεται ότι

$9p | 10^{p-1} - 1$, δηλαδή ο αριθμός N είναι ακέραιος.

4. Η εξίσωση γράφεται $3^{n-1} - n! = 3$

Αν $n \geq 6$ τότε $n! \equiv 0 \pmod{9}$ και

$$3^{n-1} \equiv 0 \pmod{9}, \text{ άρα } 9|3 \text{ που είναι άτοπο.}$$

Έτσι $1 \leq n \leq 5$. Θα εξετάσουμε τις περιπτώσεις $n = 1, 2, 3, 4$ ή 5 για να πάρουμε τις λύσεις $n = 3$ και $n = 4$.

5. Αν $n \geq 4$, τότε

$$1! + 2! + \dots + n! \equiv 1! + 2! + 3! + 4! \equiv 33 \equiv 3 \pmod{10}$$

Αλλά για κάθε ακέραιο x , ισχύει ότι

$$x \equiv 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4 \text{ ή } 5 \pmod{10}$$

$$\Rightarrow x^2 \equiv 0, 1, 4, 5, 6 \text{ ή } 9 \pmod{10}$$

Έτσι $1 \leq n \leq 3$. Θα εξετάσουμε τις περιπτώσεις $n = 1, 2$ ή 3 για να πάρουμε τις λύσεις

$n = 1$ και $n = 3$.

6. Ισχύει ότι $2^{100} \equiv (2^{10})^{10} \equiv 1024^{10} \equiv (-1)^{10} \equiv 1 \pmod{25}$

Και $2^{100} \equiv 0 \pmod{4}$

Άλλα $2^{100} \equiv 1 \equiv 76 \pmod{25}$ και $2^{100} \equiv 0 \equiv 76 \pmod{4}$

Έτσι

$$2^{100} \equiv 76 \pmod{E.K.\Pi[25,4]} \Rightarrow 2^{100} \equiv 76 \pmod{100}$$

$$\Rightarrow 2^{100} + 12 \equiv 88 \pmod{100}$$

Δηλαδή τα δυο τελευταία ψηφία του αριθμού είναι 88.

4

Διοφαντικές εξισώσεις

Ορισμός: Μια εξίσωση (στους ακέραιους) με περισσότερες από μια μεταβλητή, λέγεται **διοφαντική εξίσωση**. Ας δούμε 4 κατηγορίες επίλυσης διοφαντικών εξισώσεων που είναι χρήσιμες για μαθητές γυμνάσιου.

Κατηγορία 1: Γραμμικές Διοφαντικές Εξισώσεις.

Μια διοφαντική εξίσωση της μορφής $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = k$ λέγεται γραμμική διοφαντική εξίσωση. Οι γραμμικές διοφαντικές εξισώσεις είτε έχουν άπειρες λύσεις, ή δεν έχουν καμία λύση.

Θεώρημα 1 :

Η εξίσωση $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = k$ έχει ακέραιες λύσεις αν και μόνον αν $ΜΚΔ(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid k$

Τώρα ας δούμε μια διοφαντική με δυο μεταβλητές που έχει λύση.

Παράδειγμα 1: Να βρείτε τις ακέραιες λύσεις της εξίσωσης $3x + 5y = 19$

Λύση Αφού $ΜΚΔ(3,5) = 1 \mid 19$, η εξίσωση έχει λύση.

Η εξίσωση γράφεται $3x + 5y = 19 \Rightarrow 3x = 19 - 5y$

$$\Rightarrow x = \frac{19-5y}{3} = \frac{18-6y+y+1}{3} = 6 - 2y + \frac{y+1}{3}$$

Αφού $x \in \mathbb{Z}$ πρέπει να ισχύει ότι $\frac{y+1}{3} = k \in \mathbb{Z}$ δηλαδή $y = 3k - 1$.

$$\text{Έτσι } x = 6 - 2y + k = 6 - 2(3k - 1) + k = 8 - 5k$$

Αρά η εξίσωση έχει άπειρες λύσεις της μορφής $(x, y) = (8 - 5k, 3k - 1)$ με $k \in \mathbb{Z}$

Σχόλιο: Στις Ολυμπιάδες Γυμνάσιου, δεν έχουμε γραμμικές διοφαντικές με τρεις, τέσσερις ή και περισσότερες μεταβλητές. Η μέθοδος που χρησιμοποιήσαμε στο πιο πάνω παράδειγμα είναι σημαντική και είναι η πιο συνηθισμένη μέθοδος επίλυσης διοφαντικών εξισώσεων.

Κατηγορία 2 : Επίλυση με την χρήση ισοτιμίας

Αν μία ισότητα είναι αδύνατη με ένα mod, τότε η ισότητα είναι πάντα αδύνατη. Κάποιες φορές μπορούμε να γράφουμε μια εξίσωση σαν μία ισοτομία και να καταλήγουμε σε άτοπο.

Παράδειγμα 3 Να βρείτε τις ακέραιες λύσεις της εξίσωσης $5x + y^2 = 2017$.

Λύση: Αφού $\alpha^2 \equiv 0, 1 \text{ ή } 4 \pmod{5}$, και

$5\alpha \equiv 0 \pmod{5}$ τότε

$5x + y^2 \equiv 0, 1 \text{ ή } 4 \pmod{5}$.

Αλλά $2017 \equiv 2 \pmod{5}$.

Έτσι $5x + y^2 \not\equiv 2017 \pmod{5}$. Δηλαδή η εξίσωση είναι αδύνατη.

Κατηγορία 3 : Επίλυση με παραγοντοποίηση

Κάποιες φορές μπορούμε να γράψουμε μια διοφαντική εξίσωση σαν γινόμενο πρώτων παραγόντων. Για παράδειγμα $a_1 a_2 a_3 \dots a_n = \lambda$ και να εξετάσουμε τις διαφορετικές περιπτώσεις για τις τιμές του $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ με χρήση τους παράγοντες του ακέραιου λ . Μπορούμε ακόμη να χρησιμοποιούμε το modular για να περιορίσουμε τις περιπτώσεις.

Παράδειγμα 4: Να βρείτε τις ακέραιες λύσεις της εξίσωσης $3xy - 5x - y = 13$

(Πρώτος Γύρος Περσικής Ολυμπιάδας)

Αν $3xy - 5x - y = 13$

$\Rightarrow 9xy - 15x - 3y = 39$

$$\Rightarrow (3x - 1)(3y - 5) = 44 = 2^2 \cdot 11$$

Αφού $3x - 1 \equiv 2 \pmod{3}$ και $3y - 5 \equiv 1 \pmod{3}$ επιτρέπονται μόνο οι τρεις περιπτώσεις

$$1. \begin{cases} 3x - 1 = 44 \\ 3y - 5 = 1 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (15, 2)$$

$$2. \begin{cases} 3x - 1 = 11 \\ 3y - 5 = 4 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (4, 3)$$

$$3. \begin{cases} 3x - 1 = 2 \\ 3y - 5 = 22 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (1, 9)$$

Κατηγορία 4 : Επίλυση με την χρήση διακρίνουσας

Κάποιες φορές μπορούμε να γράψουμε μια διοφαντική εξίσωση σαν μια εξίσωση δευτέρου βαθμού. Αν θέσουμε τις μεταβλητές να είναι θετικοί ακέραιοι, η διακρίνουσα εξίσωσης δευτέρου βαθμού πρέπει να είναι τέλειο τετράγωνο. Έτσι γράφουμε μία νέα εξίσωση.

Παράδειγμα 5: Να βρείτε τις θετικές ακέραιες λύσεις της εξίσωσης:
 $(b - 1)^2 = 3a^2 + 4a - 3$

Λύση :

Η εξίσωση γράφεται ,

$$b^2 - 2ab - (3a^2 + 4a - 3) = 0.$$

Αφού b είναι θετικός ακέραιος, η διακρίνουσα της πιο πάνω εξίσωσης πρέπει να είναι τέλειο τετράγωνο. Δηλαδή:

$$\Delta = (2a)^2 + 4(3a^2 + 4a - 3) = (4a + 2)^2 - 20 = k^2.$$

$$\Rightarrow (4a + 2)^2 - k^2 = 20$$

$$\Rightarrow (4a + k + 2)(4a - k + 2) = 5 \cdot 2^2$$

Επειδή ισχύει ότι

$$(4a + k + 2) \equiv (4a - k + 2) \pmod{2} \text{ και } a > 0$$

Τότε

$$\begin{cases} 4a + k + 2 = 10 \\ 4a - k + 2 = 2 \end{cases}$$

Λύνουμε το σύστημα και από την πρώτη εξίσωση έχουμε $(a, b) = (1, 3)$

Προβλήματα

1. Να βρείτε τις θετικές ακέραιες λύσεις της εξίσωσης: $5x + 7y = 27$.
2. Να βρείτε τις θετικές ακέραιες λύσεις της εξίσωσης: $2017x^3 - 2016y^2 = 3$.
(Από τον συγγραφέα)
3. Να βρείτε τις θετικές ακέραιες λύσεις της εξίσωσης: $2^x + 1 = 3^y$.
(Πρώτος γύρος Περσικής Ολυμπιάδας)
4. Να βρείτε τις θετικές ακέραιες λύσεις της εξίσωσης: $x^y + 1 = (x + 1)^2$.
(Πρώτος γύρος Περσικής Ολυμπιάδας)
5. Να βρείτε όλους τους πρώτους αριθμούς που ικανοποιούν την εξίσωση:
 $pqr = 5(p + q + r)$.
(Βιβλίο μαθηματική Ολυμπιάδα της Περσίας)
6. Να βρείτε τις θετικές ακέραιες λύσεις της εξίσωσης: $x^2 + x + 8 = y^2$.
(Πρώτος Γύρος Περσικής Ολυμπιάδας)
7. Να βρεθούν όλοι οι πρώτοι αριθμοί p, q και θετικοί ακέραιοι t , που ικανοποιούν την εξίσωση :
 $p^2 + 3pq + q^2 = 5^t$
(Μαθηματική Ολυμπιάδα Βουλγαρίας 2000)
8. Να βρείτε τις θετικές ακέραιες λύσεις της εξίσωσης : $20^x + 13^y = 2013^z$.
(JBMO Shortlist 2013)

Λύσεις:

1. Αν

$$4x + 7y = 2017 \Rightarrow 4x = 27 - 7x \\ \Rightarrow x = \frac{2017 - 7y}{4} = 504 - 2y + \frac{y+1}{4}$$

Αφού $x \in \mathbb{Z}$ πρέπει να έχουμε $\frac{y+1}{4} = k \in \mathbb{Z}$ δηλαδή $y = 4k - 1$

$$\text{Έτσι } x = 504 - 2(4k - 1) + k \\ = 504 - 7k + 2 = 506 - 7k$$

Αρά η εξίσωση έχει άπειρες λύσεις της μορφής

$$(x, y) = (506 - 7k, 4k - 1) \text{ με } k \in \mathbb{Z}$$

2. Αν $2016 \equiv 0 \pmod{7}$ και $x^3 \equiv 0, 1 \text{ ή } 6 \pmod{7}$
και $2017 \equiv 1 \pmod{7}$

$$\text{Τότε } 2017x^3 - 2016x^2 \equiv 2017x^3$$

$$\equiv x^3 \equiv 0, 1 \text{ ή } 6 \pmod{7}$$

Αλλά $0, 1$ και $6 \not\equiv 3 \pmod{7}$, άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

3. Αν $x = 1$, τότε το $y = 1$.

Τώρα ας υποθέσουμε ότι $x > 1$, τότε παίρνουμε $\pmod{4}$ και έχουμε ότι $3^y \equiv 1 \pmod{4}$ και $3^y \equiv (-1)^y \pmod{4}$, έτσι $y \equiv 0 \pmod{2}$ (άρα είναι άρτιος).

Θέτουμε $y = 2n$ οπότε η εξίσωση γράφεται

$$2^x = 3^y - 1 = 3^{2n} - 1 \\ = (3^n - 1)(3^n + 1)$$

Αφού το γινόμενο δυο αριθμών (με διαφορά 2) ισούται με μία δύναμη του 2, οι δυο αριθμοί θα είναι δυνάμεις του 2. Άρα θα λύσουμε η εξίσωση $2^a - 2^b = 2 \Rightarrow 2^b(2^{a-b} - 1) = 2 \cdot 1$

Και έχουμε ότι $b = 1, a - b = 1$

$$\Rightarrow (a, b) = (2, 1)$$

$$\text{Άρα } 3^n + 1 = 4 \text{ ή } 3^n + 1 = 2$$

$$\text{Δηλαδή } y = 1 \text{ ή } y = 2$$

Άλλα αν $y = 1$, τότε το $x = 1$ άτοπο, αφού υποθέσαμε ότι $(x > 1)$.

$$\text{Έτσι } y = 2 \text{ και } x = 3$$

Άρα έχουμε τις λύσεις $(x, y) \in \{(1, 1), (3, 2)\}$.

4. Av

$$\begin{aligned}x^y + 1 &= (x + 1)^2 \\ \Rightarrow x^y + 1 &= x^2 + 2x + 1 \\ \Rightarrow x^y &= x^2 + 2x\end{aligned}$$

$$\stackrel{x>0}{\Rightarrow} x^{y-1} = x + 2 \Rightarrow x(x^{y-2} - 1) = 2 \cdot 1$$

Τώρα αν $x = 1$ τότε $x^{y-2} - 1 = 0$, άτοπο. Έτσι $x = 2 \Rightarrow y = 3$
Δηλαδή $(x, y) = (2, 3)$.

5. Av $\frac{pqr}{5} = p + q + r$

Ισχύει ότι $5 \mid pqr$. Έτσι έχουμε $5 \mid p$, $5 \mid q$ ή $5 \mid r$.

Χωρίς βλάβη της γενναιότητας, θέτουμε $5 \mid p$

Άρα $p = 5$

Έτσι η εξίσωση γράφεται $qr = 5 + q + r$

$$\Rightarrow qr - q - r + 1 = 6$$

$$\Rightarrow (q - 1)(r - 1) = 3 \cdot 2 = 6 \cdot 1$$

Τώρα χωρίς βλάβη τις γενναιότητας θέτουμε $r > q$, και έτσι θα έχουμε:

$$\begin{aligned}\begin{cases} q - 1 = 2 \\ r - 1 = 3 \end{cases} &\Rightarrow r = 4 \text{ άτοπο} \\ \text{ή } \begin{cases} q - 1 = 1 \\ r - 1 = 6 \end{cases} &\Rightarrow (q, r) = (2, 7)\end{aligned}$$

Έτσι έχουμε τις λύσεις:

$$(p, q, r) \in \{(2, 5, 7), (2, 7, 5), (5, 2, 7), (5, 7, 2), (7, 2, 5), (7, 5, 2)\}.$$

6. Av $4x^2 + 4x + 32 = 4y^2$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow (2x + 1)^2 + 31 = (2y)^2 \\ &\Rightarrow (2y - 2x - 1)(2y + 2x + 1) = 31 \cdot 1\end{aligned}$$

Ισχύει όμως ότι $2y + 2x + 1 > 2y - 2x - 1$

Άρα αναγκαστικά

$$\begin{cases} 2y + 2x + 1 = 31 \\ 2y - 2x - 1 = 1 \end{cases}$$

Λύνουμε το σύστημα και συμπεραίνουμε ότι

$$(x, y) = (7, 8).$$

7. Αν $p^2 + 3pq + (q^2 - 5^t) = 0$ και p είναι θετικός ακέραιος, η διακρίνουσα της πιο πάνω εξίσωσης πρέπει να είναι τέλειο τετράγωνο.

Δηλαδή,

$$\Delta = 9q^2 + 4 \cdot 5^t - 4q^2 = 5q^2 + 4 \cdot 5^t = k^2, k \in \mathbb{N}^*$$

$$k \equiv 0 \pmod{5} \Rightarrow k = 5k_1$$

$$\Rightarrow q^2 + 4 \cdot 5^{t-1} = 5k_1^2$$

$$\Rightarrow q^2 \equiv 0 \pmod{5} \Rightarrow q \equiv 0 \pmod{5}$$

$$\Rightarrow q = 5$$

Θέτουμε $q = 5$ και έχουμε ότι

$$p^2 + 15p + 25 = 5^t \Rightarrow p \equiv 0 \pmod{5}$$

$$\Rightarrow p = 5 \Rightarrow t = 3$$

$$\text{Αρά } (p, q, r) = (5, 5, 3).$$

8. Παίρνουμε $\pmod{3}$ και έχουμε

$$20^x + 13^y \equiv (-1)^x + (1)^y \pmod{3} \text{ και } 2013^z \equiv 0 \pmod{3}. \text{ Έτσι } x \equiv 1 \pmod{2} \text{ (άρα είναι περιττός).}$$

Ομοίως παίρνουμε $\pmod{7}$ και έχουμε

$$20^x + 13^y \equiv (-1)^x + (-1)^y \equiv (-1)^y - 1 \equiv 0 \text{ ή } 5 \pmod{7}$$

$$\text{Επίσης έχουμε } 2013 \equiv 4 \pmod{7} \Rightarrow 2013^z \equiv 4^z \pmod{7}$$

$$\text{Αλλά αφού } 4^3 = 64 \equiv 1 \pmod{7}$$

$$\text{Άρα καταλήγουμε ότι } 4^{3k} \equiv 1 \pmod{7}$$

$$\text{Οπότε } 2013^z \equiv 4^z \equiv 4, 2 \text{ ή } 1 \pmod{7}$$

Άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

Ενότητα Γ

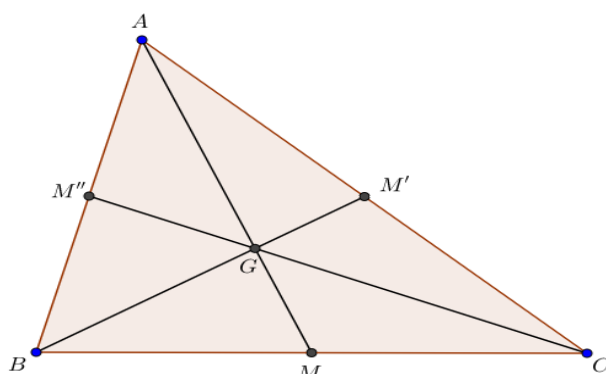
$$\frac{a}{\sin(\angle A)} = \frac{b}{\sin(\angle B)} = \frac{c}{\sin(\angle C)} = 2R$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Γεωμετρία

Βασικές ιδιότητες στα πολύγωνα**Τρίγωνα:**

1. Το τρίγωνο είναι το πολύγωνο με το μικρότερο πλήθος πλευρών. Κάθε πολύγωνο μπορεί να χωριστεί σε τρίγωνα.
2. Στο ισόπλευρο τρίγωνο το ύψος, η διάμεσος και η διχοτόμος ταυτίζονται.
3. Το σημείο τομής των υψών ονομάζεται **ορθόκεντρο**.
4. Το σημείο τομής των διαμέσων ονομάζεται **βαρύκεντρο**.
5. Το σημείο τομής των διχοτόμων ονομάζεται **έγκεντρο**.

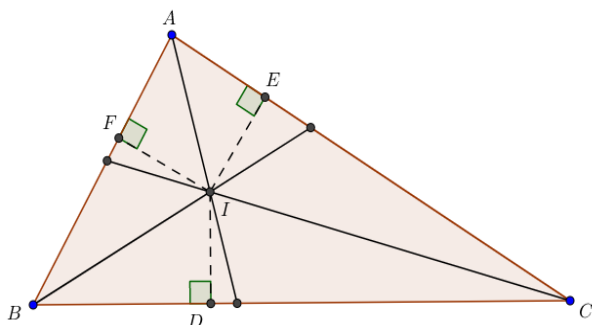


6. Για το βαρύκεντρο G του τριγώνου με διαμέσους AM , BM' , CM'' , ισχύουν οι ιδιότητες :

$$AG = 2GM \quad , \quad BG = 2GM' \quad , \quad CG = 2GM''$$

$$\text{Δηλαδή } \frac{AG}{AM} = \frac{BG}{BM'} = \frac{CG}{CM''} = \frac{2}{3}$$

7. Το έγκεντρο ισαπέχει από τις πλευρές του τριγώνου, δηλαδή οι κάθετες από το έγκεντρο ως προς τις πλευρές έχουν ίσα μήκη. Στο παρακάτω σχήμα, αν I είναι το έγκεντρο, τότε $ID = IE = IF$



8. Στο ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα BC το μήκος της διάμεσου AM ισούται με μισό του μήκους της υποτείνουσας, δηλαδή

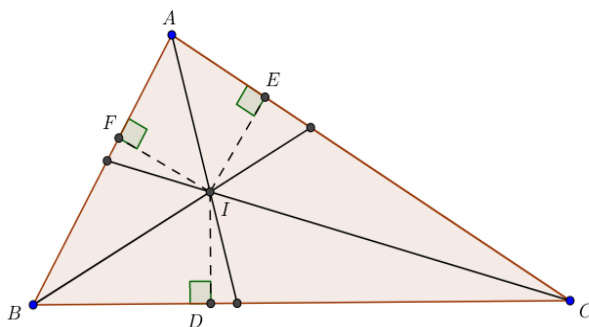
$$AM = BM = CM$$

9. Για το βαρύκεντρο G του τριγώνου με διάμεσους AM , BM' , CM'' , ισχύουν οι ιδιότητες $AG = 2GM$, $BG = 2GM'$, $CG = 2GM''$

Δηλαδή $\frac{AG}{AM} = \frac{BG}{BM'} = \frac{CG}{CM''} = \frac{2}{3}$

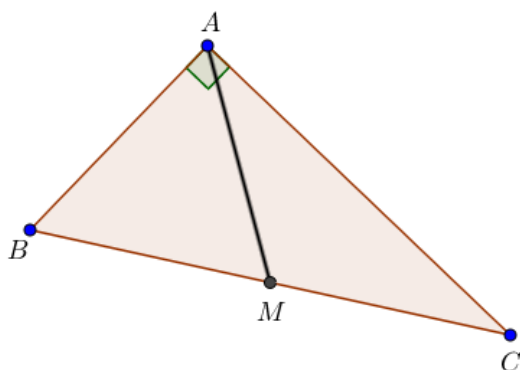
10. Το έγκεντρο ισαπέχει από τις πλευρές του τριγώνου, δηλαδή οι κάθετες από το έγκεντρο ως προς τις πλευρές έχουν ίσα μήκη.

Στο παρακάτω σχήμα, αν I είναι το έγκεντρο, τότε $ID = IE = IF$

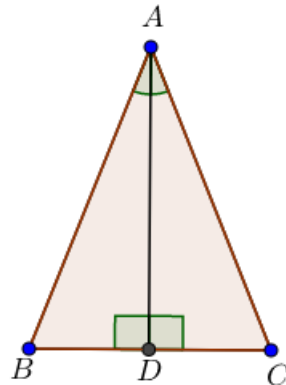


11. Σε ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα BC το μήκος της διάμεσου AM ισούται με μισό του μήκος της υποτείνουσας, δηλαδή

$$AM = BM = CM$$



12. Στο ισοσκελές τρίγωνο το ύψος, η διχοτόμος και η διάμεσος που φέρουμε στη βάση του τριγώνου συμπίπτουν.



Τετράπλευρα

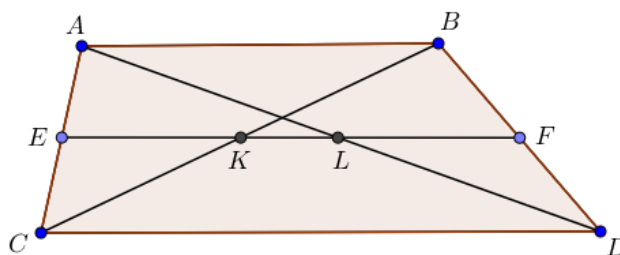
Στην ευκλείδεια γεωμετρία υπάρχουν διαφορετικά τετράπλευρα.

Α. Το τραπέζιο

Το τραπέζιο είναι ένα τετράπλευρο που έχει δύο παράλληλες πλευρές.

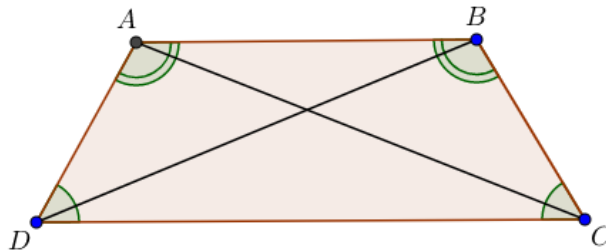
1. Στο τραπέζιο $ABCD$ αν E και F είναι τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών AC και BD αντίστοιχα και η ευθεία EF τέμνει τις διαγώνιες AD και BC στα σημεία L και K αντίστοιχα τότε ισχύουν οι ιδιότητες:

$$EF \parallel AB \parallel CD : (1), \quad EF = \frac{AB+CD}{2}, \quad KL = \frac{|CD-AB|}{2}$$



Σημείωση: Αν από το μέσο E μιας από τις μη-παράλληλες πλευρές φέρουμε μια παράλληλη ευθεία ε προς τις παράλληλες πλευρές και υποθέσουμε ότι η ε τέμνει την άλλη πλευρά στο σημείο F , τότε το F είναι το μέσο αυτής της πλευράς.

2. Το ισοσκελές τραπέζιο είναι ένα τετράπλευρο με δύο παράλληλες πλευρές και δύο μη παράλληλες ίσες πλευρές.



3. Στο ισοσκελές τραπέζιο $ABCD$ αν $AB \parallel CD$, τότε οι διαγώνιοι AC και BD έχουν ίσα μήκη $AC = BD$). Επίσης,

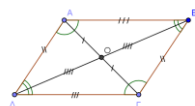
$$\angle DAB = \angle ABC \text{ και } \angle ADC = \angle BCD$$

Σημείωση Αν κάποια από τις παραπάνω σχέσεις ισχύει σε ένα τραπέζιο, τότε το τραπέζιο είναι ισοσκελές.

Β. Τα παραλληλόγραμμα

ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Παραλληλόγραμμο ονομάζεται το τετράπλευρο που έχει τις **απέναντι πλευρές του παράλληλες**.



- Ένα τετράπλευρο είναι **παραλληλόγραμμο** αν ισχύει ένα από τα πιο κάτω κριτήρια:

- 1) Οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες.

($AB \parallel \Delta\Gamma$ και $A\Delta \parallel B\Gamma$).

2) Οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες.

($AB = \Delta\Gamma$ και $A\Delta = B\Gamma$).

3) Οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες.

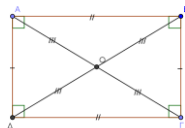
($\hat{A} = \hat{\Gamma}$ και $\hat{B} = \hat{\Delta}$)

4) Οι διαγώνιοι του διχοτομούνται, δηλαδή το κέντρο του παραλληλογράμμου είναι το μέσο των διαγώνιων του ($AO = O\Delta$ και $BO = O\Gamma$)

5) Δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες.

ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ορθογώνιο ονομάζεται το τετράπλευρο που έχει και τις **τέσσερις γωνίες ορθές** .



• Ένα τετράπλευρο είναι **ορθογώνιο** αν ισχύει ένα από τα πιο κάτω κριτήρια:

1) Τρεις ορθές γωνίες.

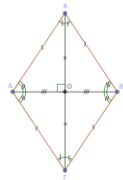
2) Όλες οι γωνίες του ίσες.

3) Είναι παραλληλόγραμμο και να έχει μια ορθή γωνία.

4) Είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοι του είναι ίσες ($AG = B\Delta$).

ΡΟΜΒΟΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ρόμβος ονομάζεται το τετράπλευρο που έχει **όλες τις πλευρές του ίσες** .

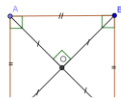


- Ένα τετράπλευρο είναι **ρόμβος** αν ισχύει ένα από τα πιο κάτω κριτήρια:

- 1) Έχει όλες τις πλευρές του ίσες.
- 2) Είναι παραλληλόγραμμο και δυο διαδοχικές του πλευρές είναι ίσες.
- 3) Είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοι τέμνονται κάθετα ($ΑΓ \perp ΒΔ$).
- 4) Είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοι διχοτομούν τις γωνίες του.

ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Τετράγωνο ονομάζεται το τετράπλευρο που έχει **όλες τις πλευρές του ίσες και όλες τις γωνίες του ορθές**.



- Ένα τετράπλευρο είναι **τετράγωνο** αν ισχύουν ταυτόχρονα:

- 1) Τα κριτήρια του παραλληλογράμμου,
- 2) τα κριτήρια του ορθογωνίου,
- 3) τα κριτήρια του ρόμβου.

Ίσα σχήματα

Δύο σχήματα λέγονται ίσα αν όλες οι πλευρές και οι γωνιές τους είναι ίσες μια προς μια, δηλαδή αν τοποθετήσουμε το ένα σχήμα πάνω στο άλλο τότε αυτά θα ταυτίζονται.

Κανόνες:

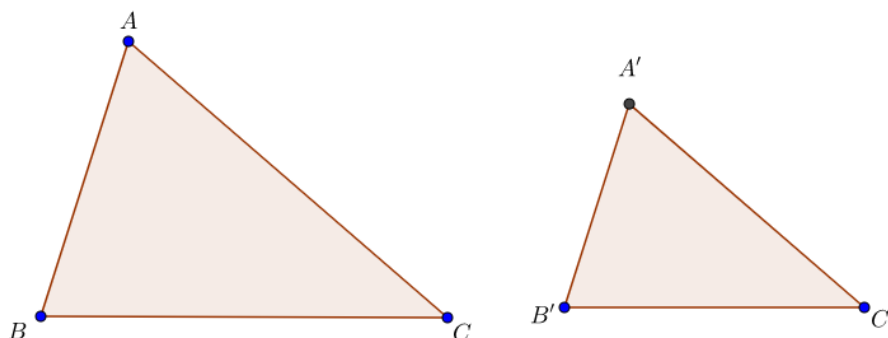
- Δυο τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν δύο ίσες πλευρές μία προς μία και την περιεχόμενη γωνία τους ίση. ($\Pi - \Gamma - \Pi$)
- Δυο τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν μία πλευρά ίση και τις προσκείμενες στην πλευρά αυτή γωνίες ίσες μία προς μία ($\Gamma - \Pi - \Gamma$)
- Δυο τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν ίσες πλευρές μια προς μία, αλλά δεν ισχύει αν έχουν ίσες γωνιές μόνο ($\Pi - \Pi - \Pi$)

Όμοια σχήματα

Δύο σχήματα λέγονται όμοια αν όλες οι γωνιές τους είναι ίσες.

Κανόνες :

- Δυο τρίγωνα είναι όμοια όταν έχουν δύο ίσες γωνιές.
- Δυο τρίγωνα είναι όμοια όταν έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες.
- Δυο τρίγωνα είναι όμοια όταν έχουν τις πλευρές τους ανάλογες μία προς μία.



Ιδιότητα

Για τα όμοια τρίγωνα ABC και $A'B'C'$ ισχύει

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'} = \frac{\sqrt{E_{ABC}}}{\sqrt{E_{A'B'C'}}} = \frac{P_{ABC}}{P_{A'B'C'}}$$

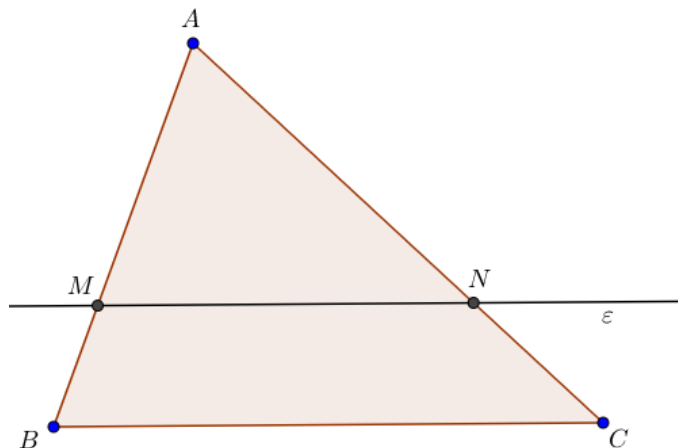
Όταν E_{ABC} συμβολίζει το εμβαδόν του τριγώνου ABC και P_{ABC} συμβολίζει την περίμετρο.

Θεώρημα 1 (Θεώρημα Θαλή)

Αν $AB\Gamma$ είναι ένα τρίγωνο, και η ευθεία ε , παράλληλη προς την $B\Gamma$ τέμνει τις πλευρές AB και $A\Gamma$ στα σημεία M και N αντίστοιχα τότε ισχύουν οι ιδιότητες:

$$1) \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

$$2) \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$$



Ισχύει το αντίστροφο του θεωρήματος, δηλαδή αν ισχύουν οι παραπάνω ιδιότητες, τότε η ευθεία ε είναι παράλληλη προς την πλευρά BC

Προβλήματα

1. Δίνεται το σκαληνό τρίγωνο ABC με διάμεσο AM και διχοτόμο AD . Η ευθεία ε , που περνά από το M είναι κάθετη στην ευθεία AD και τέμνει τις πλευρές AB και AC (τις προεκτάσεις τους) στα σημεία E και F αντίστοιχα.

Να δείξετε ότι $BE = CF$.

2. Δίνεται το τρίγωνο ABC με $\angle BAC = 120^\circ$ και διχοτόμος AD . Να δείξετε ότι:

3.
$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{1}{AD}$$

4. Δίνεται τρίγωνο με $\angle B = \angle C = 40^\circ$ και διχοτόμος BD . Να δείξετε ότι:

$$BD + DA = BC$$

(JBMO Shortlist)

5. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ABC με

$\angle B = 2 \cdot \angle C$. Από το σημείο A φέρουμε κάθετη προς την BC , η οποία τέμνει την BC στο σημείο D . Πάνω στην προέκταση της AB προς το B παίρνουμε σημείο E τέτοιο ώστε $BE = BD$. Φέρουμε την ευθεία ED , η οποία τέμνει την AC στο σημείο M . Οι κάθετες από τα σημεία A και C προς την ευθεία ED τέμνουν την ED στα σημεία K και L , αντίστοιχα.

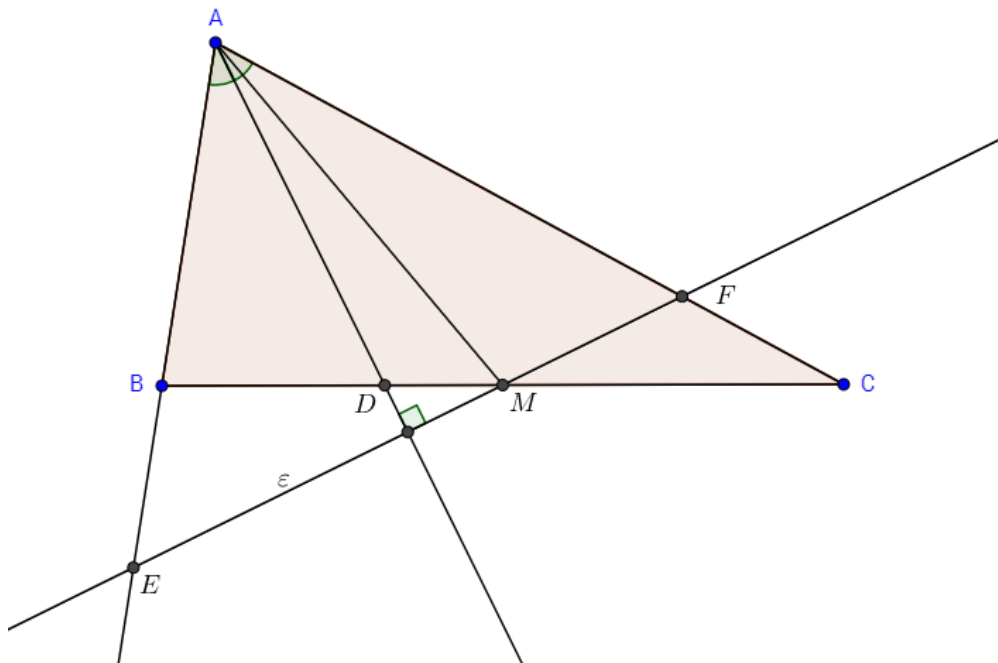
Να αποδείξετε ότι:

Το τετράπλευρο $ALCK$ είναι παραλληλόγραμμο,

(Διαγωνισμός Επιλογής JBMO Κύπρου 2016)

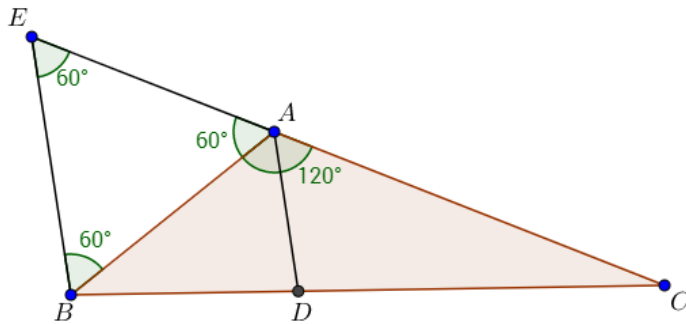
6. Δίνεται το τρίγωνο ABC με βαρύκεντρο και τυχαία ευθεία ε που περνά από το G . Αν A' , B' και C' είναι τα ίχνη των κάθετων από τα A , B και C ως προς την ευθεία ε αντίστοιχα, να δείξετε ότι το άθροισμα δυο από τα μήκη AA' , BB' και CC' ισούται με το άλλο.

1.


$$\text{Επίσης έχουμε } \begin{cases} \angle AZE = \angle AZF \\ \angle EAZ = \angle ZAF \\ AZ \text{ κοινό} \end{cases} \xRightarrow{(\Gamma-\Pi-\Gamma)} \Delta AZE = \Delta AZF \Rightarrow \angle AEZ = \angle AFZ$$
$$\angle BEL = \angle AEZ = \angle AFZ = \angle AFE = \angle BLE$$

Τώρα από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε πώς $BE = FC$

2.

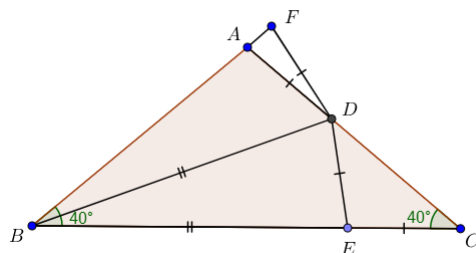


Κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο ABE πάνω στην πλευρά AB , και από τις γωνιές, μπορούμε να δούμε πως $AD \parallel BC$, δηλαδή από το Θεώρημα Θαλή έχουμε

$$AD \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{BE} = \frac{AC}{CE} \xrightarrow{BE=AB} \frac{AD}{AB} = \frac{AC}{AC+CE} \Rightarrow AD = \frac{AB \cdot AC}{AB+AC}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{AD} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$$

3.



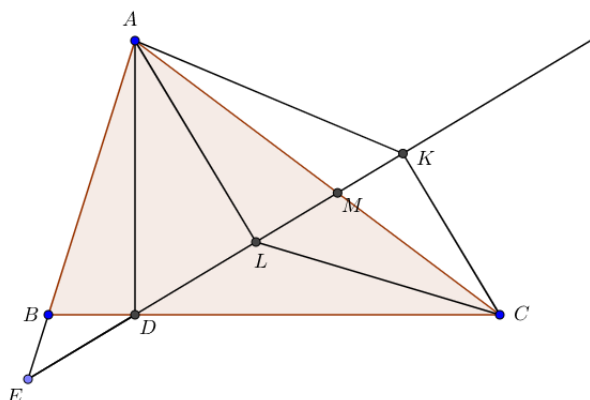
Επιλέγουμε τα σημεία E και F σαν το σχήμα έτσι ώστε $BE = BD$ και $AD = AF$. Έχουμε ότι:

$\angle ADB = 60 \Rightarrow \angle FDB = 80$ και $\angle BDE = 80 \xrightarrow{\Gamma-\Pi-\Gamma} \angle DFB = \angle DBE \Rightarrow AD = FD = DE$. Το τρίγωνο DEC είναι ισοσκελές και έτσι

$$AD = DE = EC$$

Άρα $BD + AD = BE + DF = EC + BE = BC$

4.



α) Έχουμε ότι

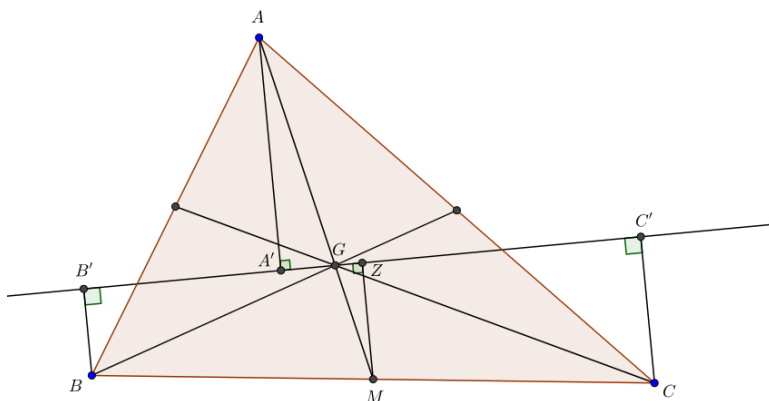
$$\angle BED = \angle BDE = \angle MDC = \frac{\angle B}{2} = \angle C = \angle MCD$$

Και έτσι $MD = MC$

Επίσης $\angle DAM = \angle DAC = 90 - \angle C = \angle MDA$

Και έτσι $MD = MA$, δηλαδή $MA = MC$: (1). Έτσι από το κριτήριο $\Gamma - \Pi - \Gamma$ (αφού $AL \parallel KC$), έχουμε $\angle ALM = \angle KMC$, δηλαδή $LM = MK$: (2). Άρα από τις σχέσεις (1) και (2) το τετράπλευρο $ALKC$ είναι παραλληλόγραμμο.

5.



Πρώτα σχηματίζουμε την κάθετη MZ προς την ευθεία ε και έχουμε $BB' \parallel MZ \parallel CC'$, δηλαδή το τετράπλευρο $BCB'C'$ είναι τραπέζιο. Αφού M είναι το μέσο της πλευράς τότε Z είναι το μέσο του ευθύγραμμο-τμήμα $B'C'$ και έτσι $MZ = \frac{BB' + CC'}{2}$. Επίσης, τα τρίγωνα $AA'G$ και GZM είναι όμοια (Αφού $AA' \parallel ZM$) και έτσι

$$\frac{AA'}{MZ} = \frac{AG}{GM} = \frac{2GM}{GM} = 2 \text{ (Αφού } G \text{ είναι βαρύκεντρο).}$$

$$\text{Άρα } AA' = 2MZ = 2 \cdot \frac{BB' + CC'}{2} = BB' + CC'$$

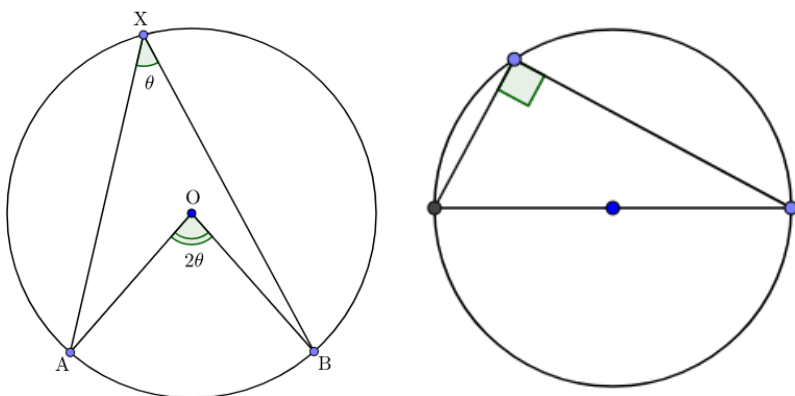
2

Κύκλοι

Ορισμός: Κύκλος είναι ο γεωμετρικός τόπος σημείου του επιπέδου που κινείται έτσι ώστε να απέχει σταθερή απόσταση R από σταθερό σημείο O . (R ακτίνα, O κέντρο).

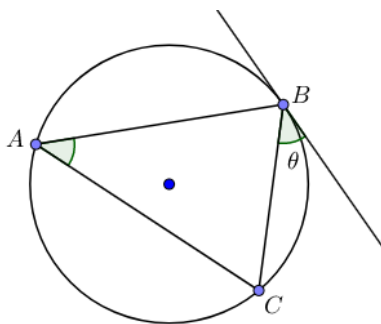
Βασικές ιδιότητες κύκλου

Στον κύκλο η εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το διπλάσιο της επίκεντρης γωνιάς και η επίκεντρη γωνιά ισούται με το μέτρο του αντίστοιχου τόξου. Δηλαδή, στο παρακάτω σχήμα $\angle AXB = 2 \cdot \angle AOB = 2AB$



Επίσης, ένα εγγεγραμμένο τρίγωνο με γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι πάντοτε ορθογώνιο.

Θεώρημα 1: Θεώρημα χορδής και εφαπτόμενης



Η γωνία που σχηματίζεται από μία χορδή (ένα ευθύγραμμο τμήμα με σημεία πάνω στον κύκλο) κύκλου και την εφαπτομένη (ε) από μια κορυφή της χορδής ισούται με την εγγεγραμμένη γωνιά που βασίζεται στη χορδή. Δηλαδή, στο παραπάνω σχήμα

$$\angle \theta = \angle BAC = \frac{BC}{2}$$

Η ακτίνα είναι πάντα κάθετη στην εφαπτόμενη στο σημείο επαφής δηλαδή το B .

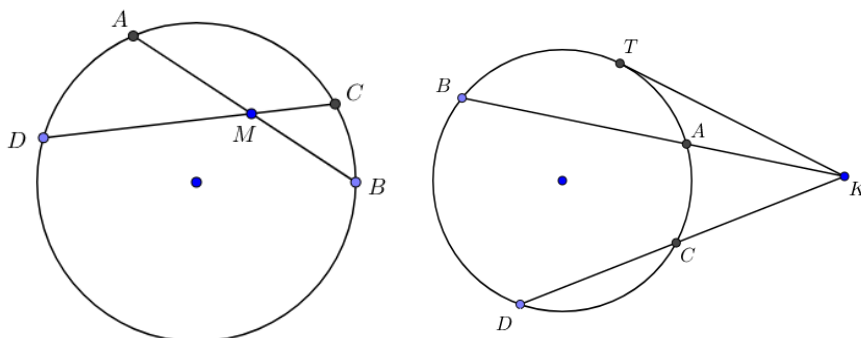
Δύναμη σημείου

Ένα σημείο A μπορεί να είναι σημείο της περιφέρειας ή να βρίσκεται μέσα ή έξω από έναν κύκλο. Η δύναμη αυτού του σημείου ως προς τον κύκλο (Γ), συμβολίζεται με $\Delta_A(\Gamma)$ και ισούται με $\Delta_A(\Gamma) = |d^2 - r^2|$, όπου d είναι η απόσταση του σημείου A από το κέντρο του κύκλου και το r είναι η ακτίνα του κύκλου.

Ισχύουν και τα εξής θεωρήματα:

Θεώρημα 2: Αν το σημείο K βρίσκεται έξω από τον κύκλο (Γ) και έχουμε δύο τυχαίες ευθείες που άγονται από το σημείο K και τέμνουν τον κύκλο στα A, B, C και D , τότε ισχύει $\Delta_K(\Gamma) = KA \cdot KB = KC \cdot KD$. Αν τώρα φέρουμε την εφαπτομένη KT από το σημείο K , τότε $\Delta_K(\Gamma) = KT^2 = KA \cdot KB = KC \cdot KD$

Επίσης, αν το σημείο M βρίσκεται μέσα στο κύκλο (Γ), και έχουμε δύο τυχαίες ευθείες από το M που τέμνουν τον κύκλο στα A, B, C και D , τότε ισχύει $\Delta_M(\Gamma) = MA \cdot MB = MC \cdot MD$

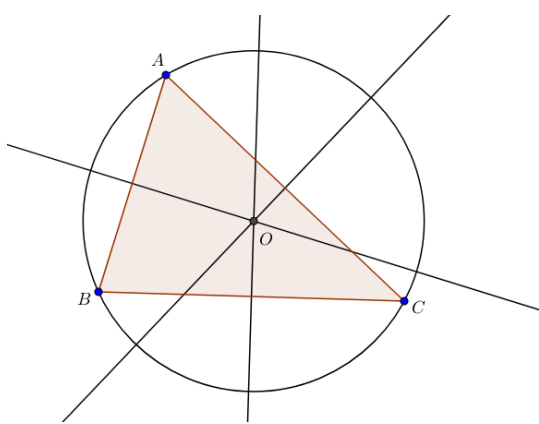


Εγγεγραμμένα σχήματα

Ορισμοί: Ένα σχήμα λέγεται εγγεγραμμένο όταν μπορούμε να σχηματίσουμε ένα κύκλο έτσι ώστε οι κορυφές του σχήματος να είναι σημεία της περιφέρειας του κύκλου. Αυτός ο κύκλος λέγεται περιγεγραμμένος κύκλος του σχήματος.

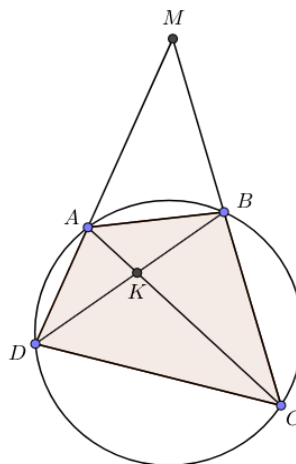
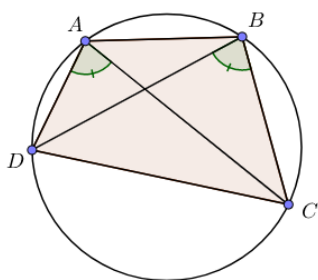
Βασικές ιδιότητες του εγγεγραμμένου σχήματος

Το τρίγωνο είναι πάντα εγγράψιμο και το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου είναι το σημείο τομής των μέσο-κάθετων πλευρών του τριγώνου. Αυτό το σημείο λέγεται το περίκεντρο του τριγώνου.



Ένα τετράπλευρο δεν είναι πάντα εγγράψιμο σε κύκλο. Υπάρχουν συγκεκριμένες προϋποθέσεις που χρειάζεται να πληρή ένα τετράπλευρο ώστε να είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

1. Οι απέναντι γωνίες είναι παραπληρωματικές, δηλαδή στο παρακάτω σχήμα $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180$
2. Μία πλευρά του φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες, δηλαδή στο σχήμα οι σημειωμένες γωνίες είναι ίσες.
3. Αν δύο μη-παράλληλες ευθείες τέμνουν στο M και οι διαγώνιοι τέμνουν στο K , τότε ισχύει: $MA \cdot MD = MB \cdot MC$ και $KA \cdot KC = KB \cdot KD$



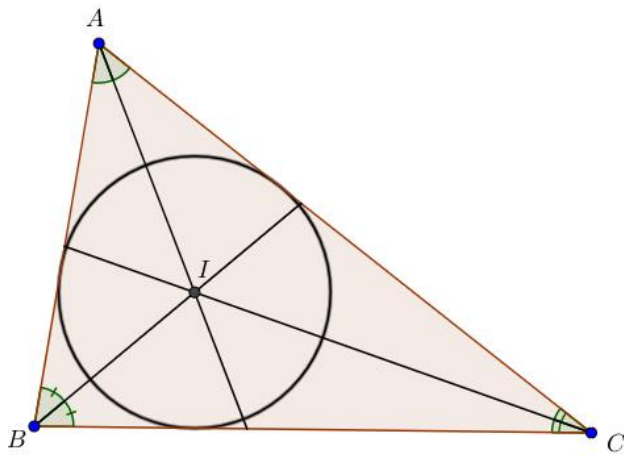
Σημείωση Αν κάποια από τις παραπάνω σχέσεις ισχύει σε ένα τετράπλευρο τότε το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο.

Περιγράψιμα σχήματα

Ορισμοί: Ένα σχήμα λέγεται περιγράψιμο όταν μπορούμε να σχηματίσουμε έναν κύκλο έτσι ώστε οι πλευρές του σχήματος να είναι όλες εφαπτόμενες στον κύκλο. Αυτός ο κύκλος λέγεται ο εγγεγραμμένος κύκλος του σχήματος.

Βασικές ιδιότητες των περιγεγραμμένων σχημάτων

Το τρίγωνο είναι πάντα περιγράψιμο και το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου του είναι το σημείο τομής των διχοτόμων, δηλαδή το έγκεντρο του τριγώνου.



Ένα τετράπλευρο δεν είναι πάντα περιγράψιμο σε κύκλο. Υπάρχουν συγκεκριμένες προϋποθέσεις που χρειάζεται να πληροί ένα τετράπλευρο ώστε να είναι περιγράψιμο σε κύκλο.

1. Το άθροισμα των μηκών των δύο απέναντι πλευρών είναι ίσα, δηλαδή
 $AB + CD = AD + BC$
2. Οι διχοτόμοι των γωνιών περνάνε από το ίδιο σημείο και αυτό το σημείο είναι το έγκεντρο του τριγώνου.

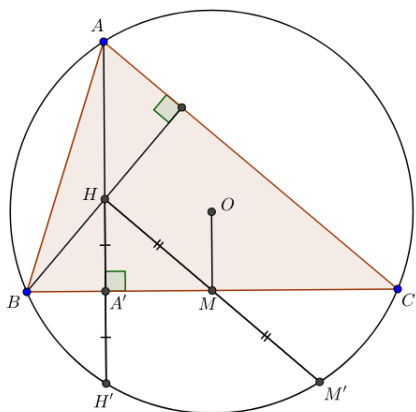
Σημείωση Αν κάποια από τις πιο πάνω σχέσεις ισχύει σε ένα τετράπλευρο τότε το τετράπλευρο είναι περιγράψιμο.

Τρία ειδικά θεωρήματα για το ορθόκεντρο και περιγεγραμμένο κύκλο τριγώνου.

Θεώρημα 3 Το συμμετρικό του ορθόκεντρου ενός τριγώνου ABC , ως προς τυχαία πλευρά του, είναι σημείο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου αυτού.

Θεώρημα 4 Το συμμετρικό του ορθόκεντρου H ενός τριγώνου ως προς το μέσο μιας τυχαίας πλευράς του, είναι σημείο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου αυτού.

Θεώρημα 5 Αν H είναι το ορθόκεντρο και O το περίκεντρο ενός τριγώνου ABC , έχουμε ότι $AH = 2OM$, όπου M είναι το μέσο του $BΓ$.



Σημείωση: Το συμμετρικό ενός σημείου A ως προς μία ευθεία ε με $AH \perp \varepsilon$ είναι ένα σημείο B πάνω στην προέκταση του κάθετη AH , έτσι ώστε $AH = BH$

Για τα θεωρήματα 3 και 4 ισχύει και το αντίστροφο. Δηλαδή αν H' είναι το σημείο τομής των AH (H ορθόκεντρο του ABC , και AA' ύψος) με το περιγεγραμμένο κύκλο, τότε $HA' = A'H'$. Όμοια ισχύει για το θεώρημα 4.

Προβλήματα

1. Δίνεται ο κύκλος Γ με κέντρο O . Έστω AB και CD δύο κάθετες χορδές του κύκλου διαφορετικές από την διάμετρο). Ο κύκλος Γ_1 με ακτίνα r εφάπτεται τον κύκλο Γ (εσωτερικό) και οι χορδές AB και CD . Τα σημεία K και H είναι τα ίχνη των κάθετων από το O ως προς τις χορδές AB και CD . Αν $r = 1\text{ cm}$, $OK = 3\text{ cm}$ και $OH = 1\text{ cm}$ να βρείτε την ακτίνα του κύκλου Γ .

(Πρώτο γύρο Περσικής Ολυμπιάδας)

2. Δίνεται το τρίγωνο ABC με $\angle A = 60^\circ$. Έστω H είναι το ορθόκεντρο, και I είναι το έγκεντρο του τριγώνου, να δείξετε ότι $\angle CHI = \frac{\angle B}{2}$.

(Πρώτο γύρο Περσικής Ολυμπιάδας)

3. Από το σημείο P , έξω από τον κύκλο Γ , σχηματίζουμε δύο τέμνουσες ως προς τον κύκλο. Η πρώτη τέμνουσα τέμνει τον Γ στα σημεία A και B , και η δεύτερη τέμνουσα τέμνει τον Γ στα σημεία C και D . Από το σημείο P , σχηματίζουμε την εφαπτόμενη PT ως προς τον κύκλο Γ . Το σημείο M είναι το μέσο του τόξου AB , και οι ευθείες MC και MD τέμνουν την ευθεία AB στα σημεία E και F αντίστοιχα. Να δείξετε ότι $\angle ETP = \angle TFE$

(Πρώτο γύρο Περσικής Ολυμπιάδας- Με λίγες αλλαγές)

4. Δίνεται το κανονικό εννεάγωνο $A_1A_2 \dots A_9$. Επιλέγουμε τα σημεία K, M και N έτσι ώστε το τετράπλευρο $A_1A_2A_4K$ είναι παραλληλόγραμμο και τα τρίγωνα A_6A_7M και A_8A_9N είναι ισόπλευρα. Να βρείτε το μέτρο της γωνιάς $\angle MKN$.

(Πρώτο γύρο Περσικής Ολυμπιάδας)

5. Ο εγγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου Γ του τριγώνου ABC εφάπτεται οι πλευρές BC, CA και AB στα D, E και F αντίστοιχα. Η ευθεία AD τέμνει τον κύκλο Γ στο σημείο Q . Έστω ότι ε είναι η ευθεία που περνά από το σημείο A και είναι παράλληλη προς την BC . Οι ευθείες DE και DF τέμνουν την ευθεία ε στα σημεία R και P αντίστοιχα. Να δείξετε ότι $\angle PQR = \angle EQF$

(Ρωσική μαθηματική Ολυμπιάδα)

6. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ABC με $AB < AC$. Οι κάθετες από τις κορυφές B και C προς τις απέναντι πλευρές AC και AB , αντίστοιχα, τέμνονται στο σημείο H . Οι μεσοκάθετες των πλευρών του τριγώνου τέμνονται στο σημείο O . Ονομάζουμε D το μέσο της πλευράς BC . Προεκτείνουμε την OD προς το D και στην προέκτασή της παίρνουμε σημείο O' τέτοιο ώστε $OD = DO'$. Υποθέτουμε ότι οι ευθείες HO' και AD τέμνονται στο σημείο P . Από το H φέρουμε κάθετη προς την AD και έστω K το ίχνος της πάνω στην AD . Η ευθεία CK τέμνει την AB στο σημείο T .

Να αποδείξετε ότι οι γωνίες $\angle BTC$ και $\angle PHK$ είναι ίσες.

(Διαγωνισμός Επιλογής JBMO Κύπρου 2016)

7. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ABC τέτοιο ώστε $AB \neq AC$ και Γ ο περιγεγραμμένος κύκλος του με κέντρο O . Έστω M το μέσο του BC και D σημείο του Γ τέτοιο ώστε $AD \perp BC$. Θεωρούμε T ένα σημείο τέτοιο ώστε το $BDCT$ να είναι παραλληλόγραμμο και Q ένα σημείο στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από την BC και περιέχει το A τέτοιο ώστε

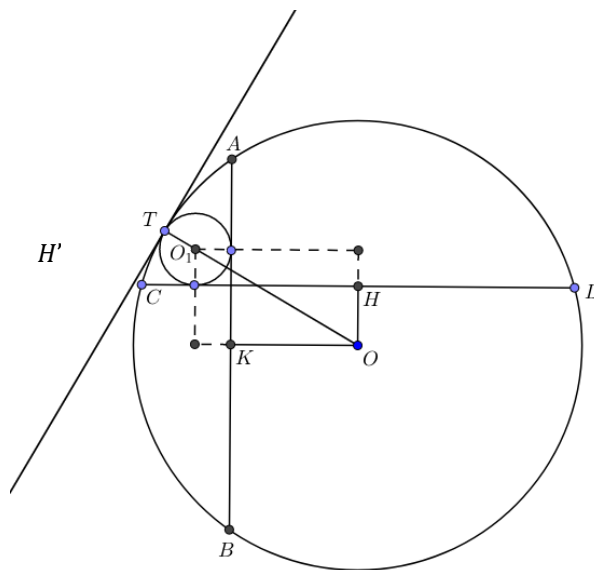
$$\angle BQM = \angle BCA \text{ και } \angle CQM = \angle CBA$$

Αν η ευθεία AO τέμνει τον Γ στο E ($E \neq A$) και ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ETQ τέμνει τον Γ στο σημείο $X \neq E$, να δείξετε ότι τα σημεία A, M και X είναι συνευθειακά (δηλαδή ανήκουν στην ίδια ευθεία).

(JBMO 2017)

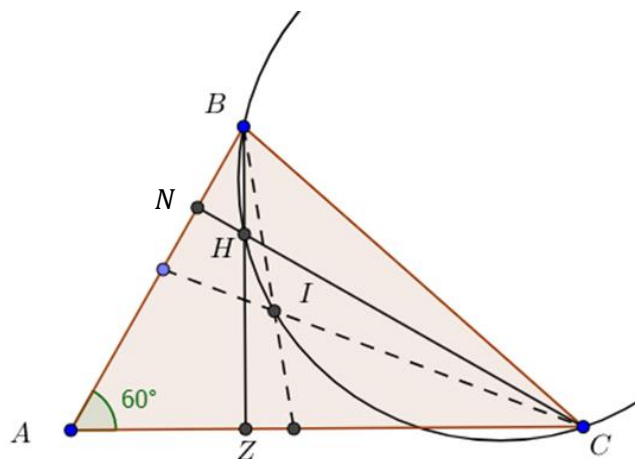
Λύσεις

1.



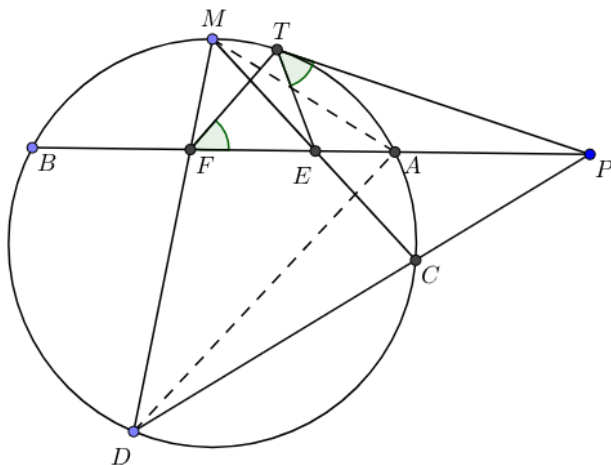
Πρώτα αν ε είναι η κοινή εφαπτομένη στο T των δύο κύκλων, τότε από το θεώρημα υπό χορδής και εφαπτόμενης, $O_1T \perp \varepsilon$ και $OT \perp \varepsilon$, δηλαδή το O, O_1 και T βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Έτσι $OT = O_1T + OO_1$. Τώρα $O_1H' = OK + r = 3 + 1 = 4$ και $OH' = OH + r = 1 + 1 = 2$, δηλαδή από το πυθαγόρειο θεώρημα $OO_1 = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$

2.



Πρώτα $\angle B + \angle C = 120^\circ \Rightarrow \frac{\angle B}{2} + \frac{\angle C}{2} = 60^\circ \Rightarrow \angle BIC = 180 - 60 = 120^\circ$ και $\angle BHC = \angle NHZ = 360 - (90 + 90 + 60) = 120^\circ$. Έτσι $\angle BIC = \angle BHC$, δηλαδή το τετράπλευρο $BHIC$ είναι εγγράψιμο. Άρα $\angle CHI = \frac{\angle C}{2} = \angle IBC = \frac{\angle B}{2}$

3.



Αφού M είναι

$$\begin{cases} \angle FAM = \angle ADM \\ \angle AMF = \angle AMD \end{cases} \Rightarrow \triangle AMF \sim \triangle DMA \Rightarrow \frac{AM}{MF} = \frac{MF}{AM} \Rightarrow AM^2 = MF \cdot MD : (1)$$

$$\text{Όμοια } \triangle BME \sim \triangle BCM \Rightarrow BM^2 = ME \cdot MC : (2)$$

Αλλά αφού M είναι το μέσο του τόξου AB , έχουμε ότι $AM = BM$, και έτσι οι σχέσεις (1) και (2) συνεπάγονται $ME \cdot MC = MF \cdot MD$. Άρα το τετράπλευρο $EFDC$ είναι εγγράψιμο, δηλαδή ισχύει και η σχέση $PE \cdot PF = PC \cdot PD$: (3)

Επίσης από τη δύναμη του σημείου έχουμε

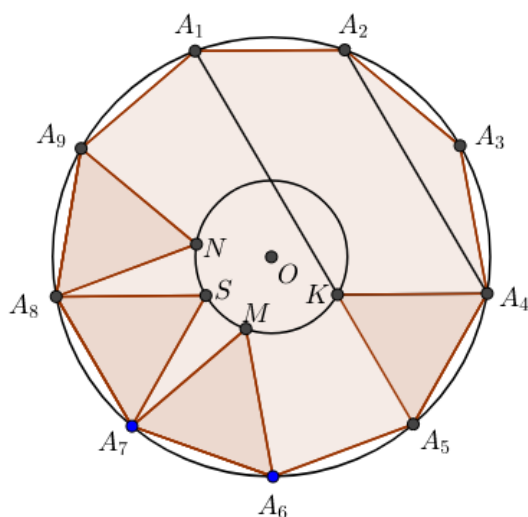
$$PT^2 = PC \cdot PD : (4)$$

και έτσι οι σχέσεις (3) και (4) συνεπάγονται

$$PT^2 = PE \cdot PF \Rightarrow \frac{PE}{PT} = \frac{PT}{PF} : (5)$$

Τώρα αφού τα τρίγωνα $\triangle PTE$ και $\triangle PTF$ έχουν την κοινή γωνιά $\angle TPF$, η σχέση (5) συνεπάγεται ότι $\triangle PTE \sim \triangle PTF$, δηλαδή $\boxed{\angle ETP = \angle TFE}$

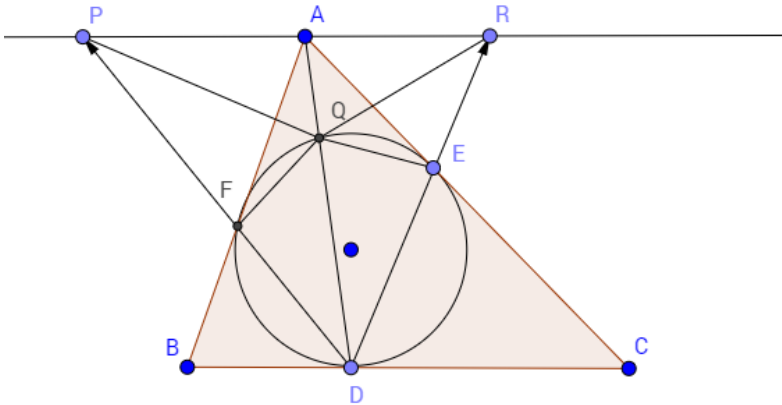
4.



Σχηματίζουμε τον περιγεγραμμένο κύκλο του εννεάγωνου. Το εννεάγωνο διαιρεί τον κύκλο σε τόξα $\frac{360}{9} = 40^\circ$. $\angle KA_1A_2 = \frac{A_2A_5}{2} = \frac{120}{2} = 60^\circ$. Τώρα αφού $A_1A_2A_4K$ είναι παραλληλόγραμμο $A_1A_2 = A_4K$ και $A_1A_2 = A_4A_5$. Επίσης $\angle KA_1A_2 = \angle KA_4A_2 = \angle A_4KA_5$, δηλαδή το τρίγωνο KA_4A_5 είναι ισόπλευρο. Αν σχηματίζουμε έναν κύκλο που περνάει από τα σημεία N, K και M τότε, λόγω της συμμετρίας, αυτός ο κύκλος περνά από όλες τις κορυφές των ισόπλευρων τριγώνων που σχηματίζουμε και έτσι αυτές τις κορυφές διαιρούνε τον κύκλο σε ίσα τόξα 40° .

$$\text{Άρα, } \angle NKM = \frac{SM}{2} + \frac{SN}{2} = \frac{40}{2} + \frac{40}{2} = 40^\circ$$

5.



Έχουμε ότι: $\angle ARE = \angle ARD = \angle EDC = \frac{\text{arc} ED}{2} = \angle DQE$

Αρά, το τετράπλευρο $AQRE$ είναι εγγράψιμο.

Όμοια, $AFQP$ είναι επίσης εγγράψιμο.

Τότε, $\angle ARQ = \angle AEQ = \frac{QE}{2} = \angle QDE$ και

$$\angle APQ = \angle AFQ = \angle FDQ$$

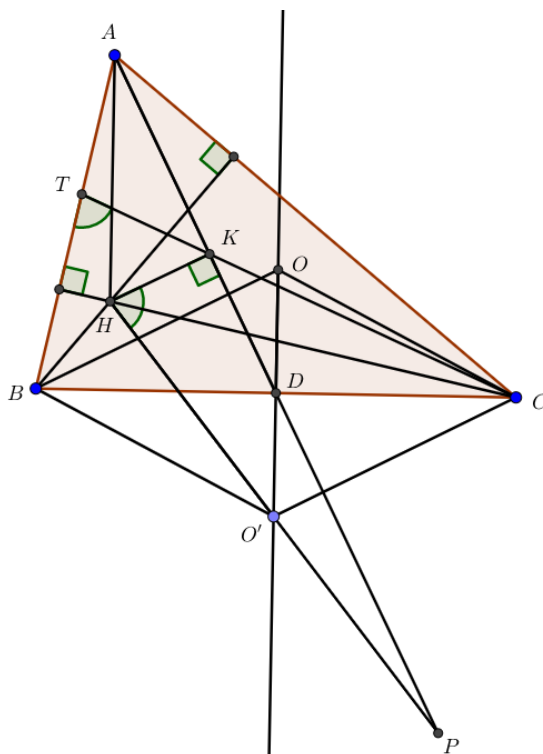
Επίσης έχουμε: $\angle FDQ + \angle QDE = \angle APQ + \angle ARQ$

$$= \angle FDE = 180 - \angle EQF$$

$$= 180 - \angle PQR$$

Αρά $\angle PQR = \angle EQF$

6.



Το O είναι το περίκεντρο του τριγώνου ABC και από το θεώρημα 5 έχουμε $AH = 2OD = 2O'D$.

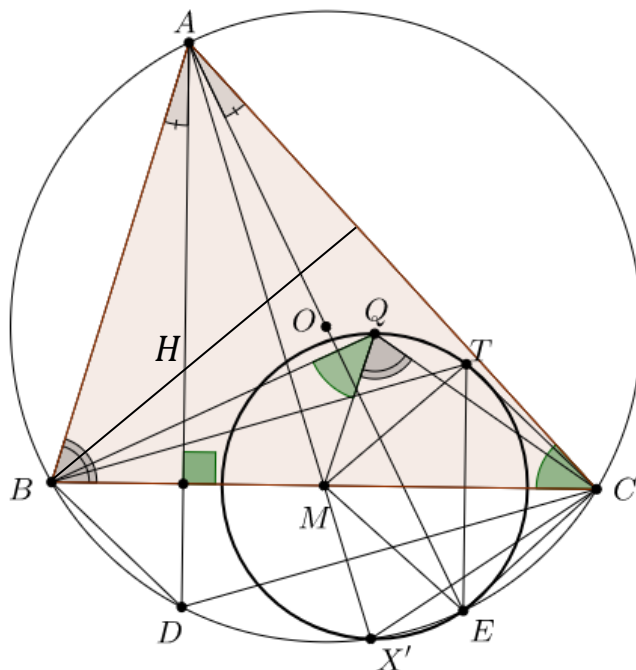
Τωρά αφού $AH \perp BC$ και $OO' \perp BG$, έχουμε ότι $DO' \parallel AH$. Έτσι, σύμφωνα με το θεώρημα του Θαλή $\frac{PD}{PA} = \frac{O'D}{AH} = \frac{1}{2}$, δηλαδή $PD = AD$. Τότε, αφού $BD = DC$ έχουμε πως το τεράπλευρο $ABCP$ είναι παραλληλόγραμο και έχουμε ότι:

$$AB \parallel PG \Rightarrow \angle HCP = 90^\circ \text{ και } \angle HKP = 90^\circ$$

Άρα, το τεράπλευρο $HKPC$ είναι εγγράψιμο, δηλαδή $\angle KPH = \angle KGH = \angle TGH$

$$\Rightarrow 90 - \angle KPH = 90 - \angle KGH \Rightarrow \boxed{\angle BTC = \angle PHK}$$

7.



Πρώτα θέτουμε H ορθόκεντρο του τριγώνου ABC . Τώρα, από το θεώρημα 3, έχουμε ότι το D είναι το συμμετρικό της H ως προς την BC . Επίσης, από το θεώρημα 4, το E είναι το συμμετρικό της H ως προς την AC . Αφού $BTDC$ είναι παραλληλόγραμμο έχουμε $MT = MD$ και $MH = ME$ με M, T και D συνευθειακά. Επίσης $\angle HDE = 90$ (αφού AE είναι διάμετρος) και έτσι το τετράπλευρο $HTDE$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Άρα, $MT = ME$ και $MC \perp TE$. Αν τώρα το X' είναι το συμμετρικό, το Q ως προς την πλευρά BC , έχουμε ότι το $TQX'E$ είναι ισοσκελές τραπέζιο και έτσι είναι εγγράψιμο. Δηλαδή X' βρίσκεται πάνω στον περιγεγραμμένο κύκλο του TEQ . Επίσης $\angle BX'C + \angle BAC = 180$,

δηλαδή X' βρίσκεται πάνω στο Γ . Έτσι το σημείο X' είναι το ίδιο με το σημείο X . Τώρα, $\angle CX'M = \angle CQM = \angle CBA = \angle CX'A$ και έτσι A, M, X' δηλαδή A, M και X είναι πάνω στην ίδια ευθεία.

3

Μετρικές σχέσεις και εμβαδά

Τριγωνικές ανισότητες

Θεώρημα 1: Σε κάθε τρίγωνο η μεγαλύτερη πλευρά είναι απέναντι από την μεγαλύτερη γωνιά.

Θεώρημα 2: Σε κάθε τρίγωνο ABC ισχύουν οι σχέσεις:

$$AB + BC > CA, \quad AB + CA > BC, \quad BC + CA > AB$$

Παράδειγμα 1: Σε κάθε τρίγωνο ABC , να δείξετε ότι το μήκος της διάμεσου AM είναι μεγαλύτερο από το $\frac{1}{2}(AB + CA - BC)$

Λύση:

Πρώτα εφαρμόζουμε το Θεώρημα 2 στα τρίγωνα AMC και AMB και έχουμε:

$$AB < AM + BM, \quad AC < AM + MC$$

$$\Rightarrow AB + AC < 2AM + (BM + MC) = 2AM + BC$$

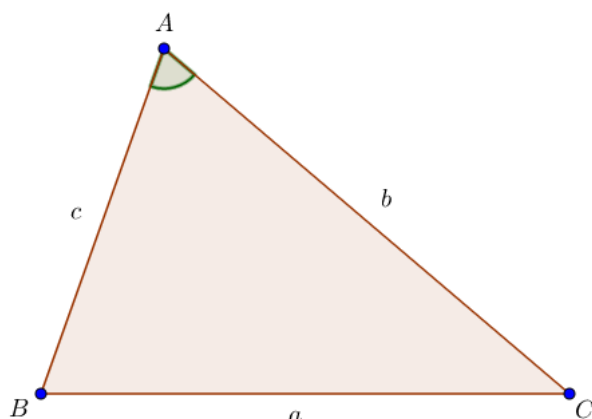
$$\Rightarrow AM > \frac{1}{2}(AB + CA - BC)$$

Μετρικές ισότητες στα τρίγωνα

Θεώρημα 3: Νόμος συνημιτόνων

Σ' ένα τρίγωνο ABC με πλευρές a, b και c ισχύει η σχέση:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$



Θεώρημα 4: Νόμος ημιτόνων

Σ' ένα τρίγωνο ABC με πλευρές a, b και c , ισχύει η σχέση:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

Όπου R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του.

Θεώρημα 5: Θεώρημα εσωτερικών διχοτόμων

Σ' ένα τρίγωνο ABC με εσωτερική διχοτόμο AD , ισχύει η σχέση: $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} : (1)$

Επίσης, έχουμε: $DB = \frac{BC \cdot BA}{CA + BA}$ και $DC = \frac{BC \cdot CA}{CA + BA}$

*Η σχέση (1) ισχύει και για εξωτερικές διχοτόμους.

Θεώρημα 6: Θεώρημα διαμέσων

Δίνεται το τρίγωνο ABC με διάμεσο AM . Πρώτα εφαρμόζουμε το νόμο συνημιτόνων στα τρίγωνα AMC και AMB και έχουμε:

- $AC^2 = MC^2 + AM^2 - 2MC \cdot AM \cdot \cos \angle AMC$
 $= \left(\frac{BC}{2}\right)^2 + AM^2 - BC \cdot AM \cdot \cos \angle AMC : (1)$
- $AB^2 = MB^2 + AM^2 - 2MB \cdot AM \cdot \cos \angle AMB$
 $= \left(\frac{BC}{2}\right)^2 + AM^2 - BC \cdot AM \cdot \cos \angle AMB : (2)$

Τώρα αφού $\angle AMB = 180 - \angle AMC$ έχουμε $\cos \angle AMB = -\cos \angle AMC$. Έτσι προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$AB^2 + AC^2 = \frac{(BC)^2}{2} + 2AM^2$$

Έτσι προκύπτει η σχέση:

$$AM = \sqrt{\frac{1}{2} \left(AC^2 + AB^2 - \frac{BC^2}{2} \right)}$$

Και έτσι υπολογίσαμε το μήκος της μιας διαμέσου του τριγώνου συναρτήσει των πλευρών του.

Ομοίως, υπολογίζουμε και το μήκος των άλλων δύο διαμέσων.

Θεώρημα 7: Εμβαδόν τριγώνου

Το εμβαδόν κάθε τριγώνου ισούται με το γινόμενο του μήκους 2 πλευρών του και του ημιτόνου της περιεχόμενης γωνίας τους.

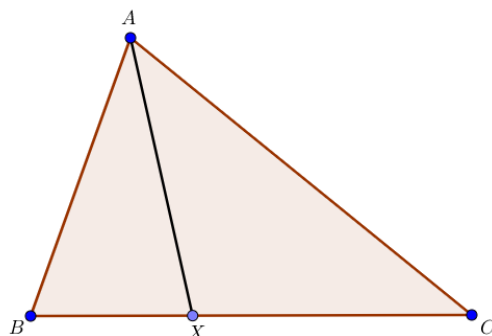
$$\text{Δηλαδή } E_{ABC} = AB \cdot AC \cdot \sin \angle A$$

Θεώρημα 8

Έστω ότι X είναι ένα σημείο πάνω στην πλευρά BC του τριγώνου ABC , έχουμε ότι

$$\frac{E_{ABX}}{E_{ACX}} = \frac{BX}{CX}$$

όπου E_{ABC} και E_{ACX} τα εμβαδά των τριγώνων ABC και ACX αντίστοιχα.



Θεώρημα 9: Τύπος του Ήρωνα

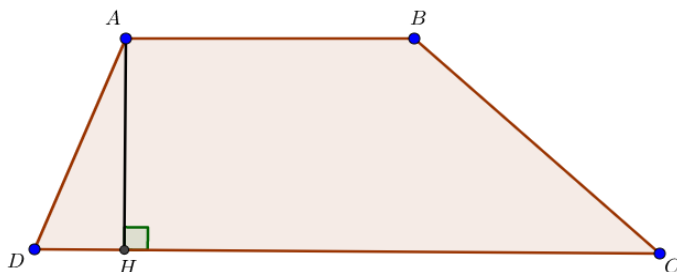
Το εμβαδόν κάθε τριγώνου με πλευρές a , b και c ισούται με:

$$E = \sqrt{\tau(\tau - a)(\tau - b)(\tau - c)}$$

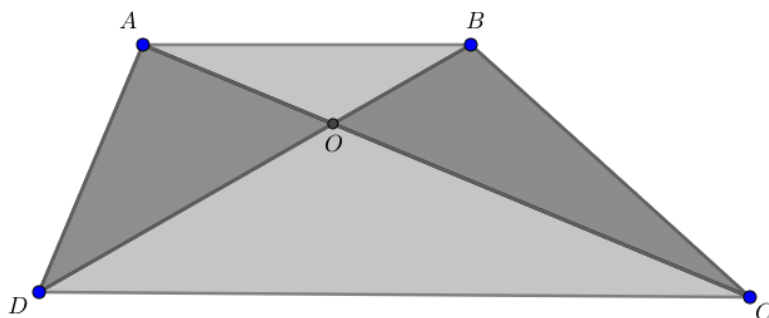
όπου τ συμβολίζει την ημιπερίμετρο του τριγώνου.

Εμβαδόν τραπεζίου

Θεώρημα 10: Δίνεται το τραπέζιο $ABCD$ με $AB \parallel CD$ και ύψος AH . Το εμβαδόν του ισούται με $E_{ABCD} = \frac{1}{2}AH \cdot (AB + CD)$.



Θεώρημα 11: Δίνεται το τραπέζιο $ABCD$ με $AB \parallel CD$. Αν οι διαγώνιοι AC και BD τέμνονται στο O , ισχύει ότι $E_{OBC} = E_{OAD}$.



Ειδικές Εφαρμογές του θεωρήματος 8

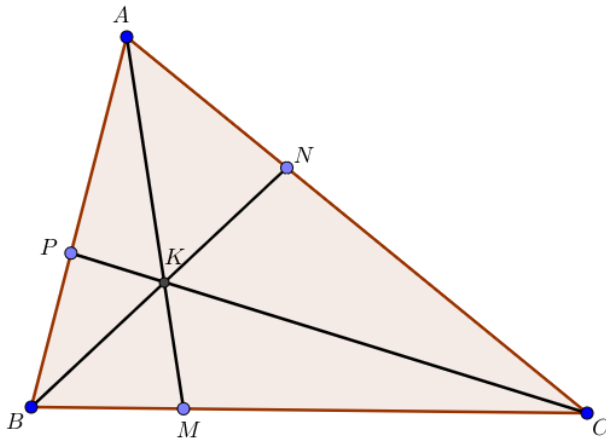
Το θεώρημα 7 παράγει δυο ειδικά θεωρήματα με πολλές χρήσεις. Ας δούμε τα θεωρήματα:

Θεώρημα 12: Θεώρημα Σέβα

Έστω ότι P , M και N σημεία πάνω στις πλευρές AB , BC και CA ενός τριγώνου ABC (ή στις προεκτάσεις τους), έτσι ώστε AM , BN και CP να περνάνε από το ίδιο σημείο, τότε ισχύει η σχέση :

$$\frac{AP}{BP} \cdot \frac{BM}{CM} \cdot \frac{CN}{AN} = 1$$

Ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή αν ισχύει η παραπάνω σχέση, τότε οι ευθείες AM, BN, CP περνάνε από το ίδιο σημείο (συντρέχουν).



Απόδειξη

Αφού $\frac{BM}{CM} = \frac{E_{ABM}}{E_{ACM}}$ και $\frac{BM}{CM} = \frac{E_{BOM}}{E_{COM}}$ έχουμε $\frac{BM}{CM} = \frac{E_{AOB}}{E_{AOC}}$ όμοια $\frac{CN}{AN} = \frac{E_{BOC}}{E_{AOB}}$ και $\frac{AP}{BP} = \frac{E_{AOC}}{E_{BOC}}$

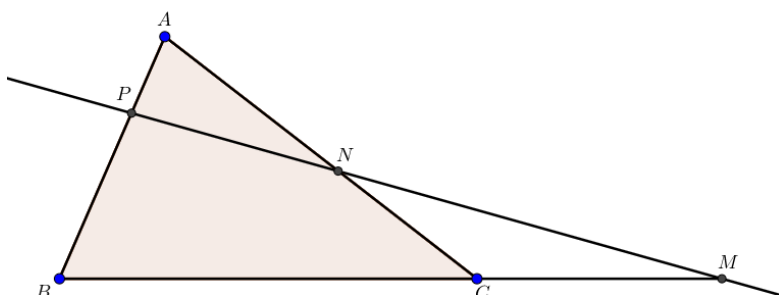
Άρα $\frac{AP}{BP} \cdot \frac{BM}{CM} \cdot \frac{CN}{AN} = \frac{E_{AOB}}{E_{AOC}} \cdot \frac{E_{BOC}}{E_{AOB}} \cdot \frac{E_{AOC}}{E_{BOC}} = 1$

Θεώρημα 13: Θεώρημα Μενελάου

Αν μια ευθεία ε τέμνει τις πλευρές AB, BC και CA ενός τριγώνου ABC (ή τις προεκτάσεις τους) στα σημεία P, M και N αντίστοιχα, τότε ισχύει η σχέση

$$\frac{BM}{CM} \cdot \frac{CN}{AN} \cdot \frac{AP}{BP} = 1$$

Ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή, αν ισχύει η παραπάνω σχέση, τότε τα σημεία P, M και N είναι πάνω στην ίδια ευθεία.



Προβλήματα

1. Θεωρούμε τρίγωνο ABC και έστω M το μέσο της πλευράς BC . Υποθέτουμε ότι $\angle MAC = \angle ABC$ και $\angle BAM = 105^\circ$. Να βρείτε το μέτρο της γωνίας $\angle ABC$.

(JBMO Shortlist 2010)

2. Θεωρούμε τρίγωνο ABC με $\angle A = 60^\circ$. Έστω E ένα σημείο πάνω στην πλευρά AC και D ένα σημείο πάνω στην προέκταση του BC (C βρίσκεται ανάμεσα των B και D), έτσι ώστε $AB = DE$ και $\angle DEC = 30^\circ$. Να βρείτε τον λόγο $\frac{BC}{CD}$.

(Πρώτος Γύρος Περσικής Ολυμπιάδας)

3. Δίνονται οι κύκλοι Γ_1, Γ_2 και Γ_3 με ακτίνες $1, 2$ και 3 cm . Αυτοί οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά στα A, B και C . Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ABC .

(Μαθηματικός διαγωνισμός Αμερικής)

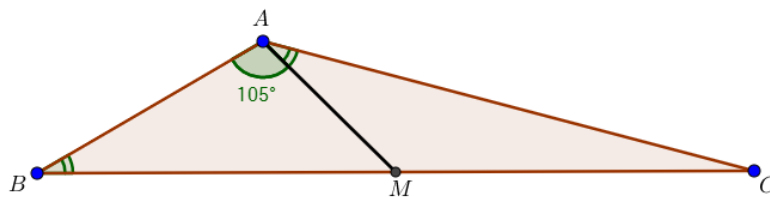
4. Δίνεται το παραλληλόγραμμο $ABCD$. Οι εσωτερικοί διχοτόμοι του παραλληλόγραμμου τέμνονται στα σημεία E, F, G και H . Να δείξετε ότι

$$\frac{E_{EFGH}}{E_{ABCD}} = \frac{(|AB-AC|)^2}{2 \cdot AB \cdot AC}, \text{ όπου } AC \parallel BD.$$

(Πρώτος γύρος Περσικής Ολυμπιάδας- Με λίγες αλλαγές)

Λύσεις

1.



Αφού $\angle MAC = \angle ABC$ και $\angle C$ είναι κοινή γωνία στα τρίγωνα MAC και ABC , τότε είναι όμοια. Άρα, $AC = BC\sqrt{2}$

Επίσης, από νόμο ημιτόνων:

$$\frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin(105 + B)}$$

$$\Rightarrow \sin B \cdot \sqrt{2} = \sin(105 + B)$$

$$= \sin 105 \cos B + \cos 105 \sin B : (1)$$

$$\text{Επίσης, } \sin 105 = \sin(45 + 60) = \sin 45 \cdot \cos 60 + \cos 45 \cdot \sin 60 = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

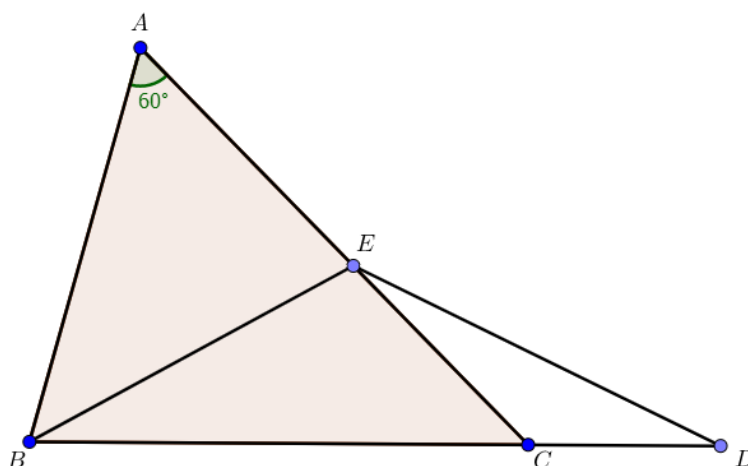
$$\text{και άρα, } \cos 105 = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} (*)$$

$$\text{Άρα, από (1), } \frac{\cos B}{\sin B} = \frac{1}{\tan B} = \sqrt{3}, \text{ δηλαδή } \angle B = 30$$

Σχόλια : $\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad (*)$$

2.



Από τον νόμο ημιτόνων στα τρίγωνα ABC και CDE , έχουμε :

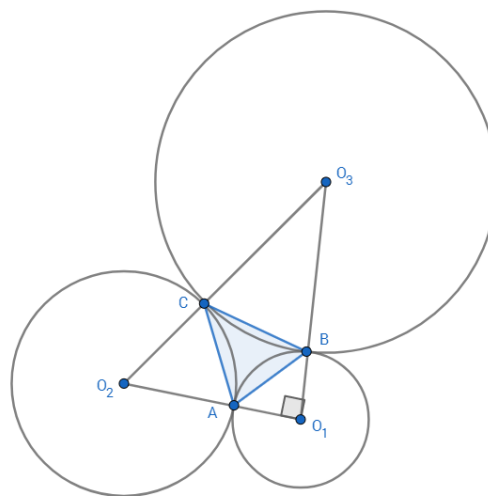
$$\frac{BC}{\sin 60^\circ} = \frac{AB}{\sin \angle ACB} \Rightarrow BC = \frac{AB \cdot \sin 60^\circ}{\sin \angle ACB}$$

$$\frac{CD}{\sin 30^\circ} = \frac{DE}{\sin \angle DCE} \Rightarrow CD = \frac{DE \cdot \sin 30^\circ}{\sin \angle DCE}$$

Επίσης, $\angle ACB + \angle DCE = 180^\circ \Rightarrow \sin \angle ACB = \sin \angle DCE$

Τώρα, αφού $AB = DE$, έχουμε $\frac{BC}{CD} = \frac{\sin 60^\circ}{\sin 30^\circ} = \sqrt{3}$

3.



Πρώτα, έστω ότι τα κέντρα των κύκλων Γ_1 , Γ_2 και Γ_3 είναι O_1 , O_2 και O_3 αντίστοιχα. Είναι γεγονός πως O_1 , A και O_2 (για παράδειγμα) είναι συνευθειακά (μπορεί να αποδειχθεί εύκολα). Έτσι, $O_1O_2 = 3\text{cm}$, $O_1O_3 = 4\text{m}$ και $O_2O_3 = 5\text{cm}$, δηλαδή από το αντίστροφο του πυθαγόρειου θεωρήματος, το τρίγωνο $O_1O_2O_3$ είναι ορθογώνιο. Άρα,

$$E_{ABC} = E_{O_1O_2O_3} - (E_{O_1AB} + E_{O_2AC} + E_{O_3BC})$$

Επίσης, έχουμε $E_{O_1O_2O_3} = \frac{1}{2}(O_1O_2)(O_1O_3) = 6\text{cm}^2$

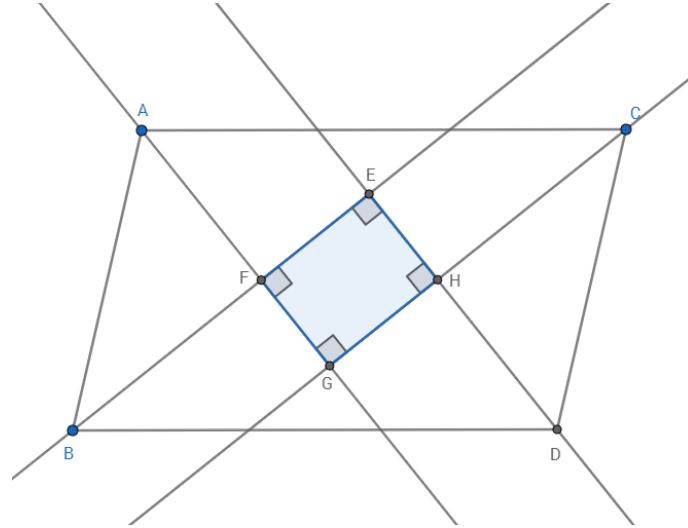
$$E_{O_1AB} = \frac{1}{2}(O_1A)(O_1B) = \frac{1}{2}\text{cm}^2$$

$$E_{O_2AC} = \frac{1}{2}(O_2A)(O_2C)(\sin \angle O_2) = \frac{(2 \cdot 2 \cdot \frac{4}{5})}{2} = \frac{8}{5}\text{cm}^2$$

$$E_{O_2AC} = \frac{1}{2}(O_3B)(O_3C)(\sin \angle O_3) = \frac{(3 \cdot 3 \cdot \frac{3}{5})}{2} = \frac{27}{10} \text{ cm}^2$$

$$\text{Άρα } E_{ABC} = 6 - \left(\frac{1}{2} + \frac{8}{5} + \frac{27}{10}\right) = \frac{6}{5} \text{ cm}^2$$

4.



Αφού $\angle A + \angle B = 180^\circ$, έχουμε $\frac{\angle A}{2} + \frac{\angle B}{2} = 90^\circ$ και έτσι $\angle EFG = \angle AFB = 90^\circ$ και όμοια

$\angle FEH = \angle EHG = \angle HGF = 90^\circ$, άρα το τετράπλευρο $EFGH$ είναι ορθογώνιο.

$$\text{Τώρα } FG = AG - AF = AC \cdot \cos \frac{A}{2} - AB \cdot \cos \frac{A}{2} = \cos \frac{A}{2} (AC - AB)$$

$$\text{Και } EF = EB - FB = BD \cdot \cos \frac{B}{2} - AB \cdot \cos \frac{B}{2} = \cos \frac{B}{2} (AC - AB)$$

$$\text{Έτσι } \frac{E_{EFGH}}{E_{ABCD}} = \frac{EF \cdot FG}{AB \cdot AC \cdot \sin A} = \frac{(AC - AB)^2 \left(\cos \frac{B}{2} \cos \frac{A}{2} \right)}{AB \cdot AC \cdot \sin A}$$

$$\text{αφού } \frac{B}{2} + \frac{A}{2} = 90^\circ \text{ έχουμε } \cos \frac{B}{2} = \sin \frac{A}{2}$$

Επίσης $\sin 2\theta = \sin(\theta + \theta) = 2 \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta$, δηλαδή,

$$\sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{A}{2} = \frac{\sin A}{2}, \text{ άρα } \frac{E_{EFGH}}{E_{ABCD}} = \frac{(AC - AB)^2 \left(\cos \frac{\angle B}{2} \cos \frac{\angle A}{2} \right)}{AB \cdot AC \cdot \sin \angle A} = \frac{(|AB - AC|)^2}{2 \cdot AB \cdot AC}$$

Ενότητα Δ

$$(x + a)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k a^{n-k}$$

$$P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Συνδυαστική

1

Απαρίθμηση

Θεώρημα 1: Πολλαπλασιαστική Αρχή

Αν το στοιχείο x_1 μπορεί να επιλεγεί με a_1 διαφορετικούς τρόπους και για κάθε επιλογή του x_1 , το στοιχείο x_2 μπορεί, επίσης, να επιλεγεί με a_2 διαφορετικούς τρόπους, ... , και για κάθε επιλογή των $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}$, το στοιχείο x_k

μπορεί να επιλεγεί με a_k διαφορετικούς τρόπους, τότε όλα τα στοιχεία $x_1, x_2, \dots, x_k$ μπορούν να επιλεγούν κατά $a_1 a_2 a_3 \dots a_n = \prod_{j=1}^n a_j$ τρόπους.

Π.χ. Ένα εργοστάσιο παράγει ρούχα με 6 διαφορετικά χρώματα, 3 διαφορετικά μεγέθη και 2 διαφορετικά υφάσματα.

Το εργοστάσιο μπορεί να φτιάξει ρούχα με $6 \times 3 \times 2 = 36$ διαφορετικούς τρόπους.

Θεώρημα 2: Θεμελιώδης αρχή απαρίθμησης

Αν ένα στοιχείο μπορεί να επιλεγεί με a_1 διαφορετικούς τρόπους ή a_2 διαφορετικούς τρόπους, ... , ή a_n διαφορετικούς τρόπους, τότε το στοιχείο μπορεί να επιλέγει κατά $a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{j=1}^n a_j$ τρόπους.

Παράδειγμα 1 Πόσοι διαφορετικοί τριψήφιοι άρτιοι αριθμοί μπορεί να σχηματιστούν χρησιμοποιώντας τα ψηφία:

$$\Sigma = \{0,1,2,3,4,5,6,7\};$$

Λύση:

Περίπτωση 1 (μονάδες= 0)

$$\begin{array}{ccc} \text{εκατονταδες} & \text{δεκάδες} & \text{μονάδες=0} \\ \hline \boxed{6 \text{ επιλογές}} & \boxed{7 \text{ επιλογές}} & \boxed{1 \text{ επιλογή}} \end{array} \rightarrow$$

$$\text{Συνολικά } 6 \cdot 7 = 42 \text{ επιλογές}$$

Περίπτωση 2 (μονάδων $\neq 0$)

$$\overbrace{\boxed{6 \text{ επιλογές}}}^{\text{εκατοντάδες}} \overbrace{\boxed{6 \text{ επιλογές}}}^{\text{δεκάδες}} \overbrace{\boxed{3 \text{ επιλογές}}}^{\text{μονάδες} \neq 0} \rightarrow \text{Συνολικά } 6 \cdot 6 \cdot 3 = 108 \text{ επιλογές}$$

Άρα από την αρχή απαρίθμησης έχουμε συνολικά $108 + 42 = 150$ αριθμούς.

Διατάξεις:

Το πλήθος των τρόπων με τον οποίο μπορούμε να τοποθετήσουμε n διαφορετικά αντικείμενα σε k θέσεις (όταν μας ενδιαφέρει η σειρά) είναι:

$$P(n, k) = \frac{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n - k)} = \frac{n!}{(n - k)!} = n \times (n - 1) \dots \times (n - k + 1)$$

όπου $0! = 1! = 1$

Περιγραφή: Σχηματίζουμε το διάγραμμα

$$\underbrace{\boxed{n \text{ επιλογές}} \boxed{n - 1 \text{ επιλογές}} \dots \boxed{n - k + 1 \text{ επιλογές}}}_{k \text{ θέσεις}}$$

$$\Rightarrow n \times (n - 1) \dots \times (n - k + 1) = \frac{n!}{(n - k)!}$$

Συνδυασμοί:

Το πλήθος των τρόπων με το οποίο μπορούμε να επιλέξουμε k από n διαφορετικά αντικείμενα (όταν δε μας ενδιαφέρει η σειρά) είναι:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n - k)! \times k!}$$

Περιγραφή:

Αφού δε μας ενδιαφέρει η σειρά τοποθέτησης έχουμε:

$$\binom{n}{k} \cdot P(k, k) = P(n, k)$$

$$\text{και έτσι } \binom{n}{k} = \frac{P(n, k)}{k!} = \frac{n!}{(n - k)! \times k!}$$

Για παράδειγμα:

Μπορούμε να επιλέξουμε 6 από 10 μπάλες με $\binom{10}{6} = 210$ τρόπους (αφού δεν μας ενδιαφέρει η σειρά) αλλά, 5 παιδιά μπορούν να κάτσουν σε 3 καρέκλες σε σειρά (1 σε κάθε καρέκλα) με $P(5,3) = 60$ τρόπους.

Παράδειγμα 2 Δίνονται 10 σημεία πάνω σε ένα κύκλο. Να βρείτε με πόσους τρόπους μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα πεντάγωνο από αυτά τα σημεία.

Λύση: Αφού από κάθε πέντε σημεία μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα πεντάγωνο, η απάντηση είναι: $\binom{10}{5} = 252$

Διατάξεις με επανάληψη:

Παράδειγμα 3 Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε 1 μαύρη, 2 μπλε, 1 κόκκινη, 1 πράσινη και 3 άσπρες μπάλες σε 8 θέσεις;

Λύση: Αν όλα τα χρώματα ήταν διαφορετικά, τότε το πλήθος των τρόπων με τον οποίο μπορούμε να τοποθετήσουμε 8 μπάλες σε 8 θέσεις είναι $P(8,8) = 8!$

Αλλά έχουμε 2 μπλε και 3 άσπρες μπάλες, δηλαδή τα ίδια χρώματα επαναλαμβάνονται και έτσι κάποιες διατάξεις θα είναι ίδιες με άλλες.

Άρα οι τρόποι (έτσι ώστε να μην υπολογίσουμε κάποιες διατάξεις δύο και τρεις φορές) είναι:

$$P = \frac{8!}{2! \times 3!}$$

Θεώρημα 3: Η διάταξη n αντικειμένων όταν $a_1, a_2, \dots, a_n$ αντικείμενα είναι τα ίδια, ισούται με $P(n; a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{n!}{a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n}$

Θεώρημα διώνυμων (Pascal-Newton-Khayyam):

$$(x + y)^n = x^n + x^{n-1} \binom{n}{1} y^1 + x^{n-2} \binom{n}{2} y^2 + \dots + y^n$$

Παράδειγμα 4 Να δείξετε ότι κάθε σύνολο με n στοιχεία έχει 2^n υποσύνολα.

Λύση: Το κενό σύνολο είναι υποσύνολο κάθε συνόλου, και έτσι το πλήθος των υποσυνόλων είναι:

$$A = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}$$

αλλά

$$\begin{aligned} A &= 1 + 1 \times \binom{n}{1} + 1 \times \binom{n}{2} + \cdots + 1 \times \binom{n}{n} \times 1 \\ &= (1 + 1)^n = 2^n \end{aligned}$$

Θεώρημα 5:

Ο πλήθος των μη-αρνητικών ακεραίων λύσεων της εξίσωσης :

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$$

$$\text{είναι } \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$$

Παράδειγμα 5 Να βρείτε με πόσους τρόπους μπορούμε να μοιράσουμε 7 πορτοκάλια σε 3 παιδιά έτσι ώστε κάθε παιδί έχει τουλάχιστον 2 πορτοκάλια.

Λύση: Δίνεται η εξίσωση: $x_1 + x_2 + x_3 = 7$ με $x_1, x_2, x_3 \geq 2$

θέτουμε $y_1 = x_1 - 2$, $y_2 = x_2 - 2$, $y_3 = x_3 - 2$ όπου y_1, y_2, y_3 μη-αρνητικοί ακέραιοι.

Η εξίσωση γράφεται:

$y_1 + y_2 + y_3 = 13$ και το πλήθος των λύσεων είναι: $\binom{13+3-1}{3-1} = \binom{15}{2} = 105$. Άρα η απάντηση είναι 105.

Προβλήματα

1. Να βρείτε πόσοι πενταψήφιοι αριθμοί έχουν άθροισμα ψηφίων 3.
(Βιβλίο μαθηματικής Ολυμπιάδας της Περσίας)
2. Το εστιατόριο «χρυσό αυγό» κάθε μέρα σερβίρει μόνο ένα από τα φαγητά : ομελέτα, βραστό αυγό και τηγανιτό αυγό. Να βρείτε με πόσους τρόπους ο μάγειρας μπορεί να κανονίσει ένα πρόγραμμα για μία εβδομάδα έτσι ώστε κάθε δυο διαδοχικές μέρες το εστιατόριο να σερβίρει διαφορετικά φαγητά.
(Πρώτος γύρος Περσικής Ολυμπιάδας)
3. Για μία εργασία θέλουμε να ομαδοποιήσουμε 6 μαθητές έτσι ώστε κάθε ομάδα να έχει 1 ή 2 μαθητές. Με πόσους τρόπους μπορούμε να το πετύχουμε αυτό;
(Πρώτος γύρος Περσικής Ολυμπιάδας- Παλιά)
4. Μία ακολουθία με τους αριθμούς $1, -1$ λέγεται επιτυχημένη αν δεν μπορούμε να βρούμε κάποιους διαδοχικούς αριθμούς στην ακολουθία έτσι ώστε το άθροισμα τους είναι αρνητικό. Να βρείτε πόσες επιτυχημένες ακολουθίες έχουν 7 στοιχεία.
(Πρώτος γύρος Περσικής Ολυμπιάδας)
5. Έχουμε 10 λαμπτήρες σε μία σειρά. Σε κάθε βήμα ανάβουμε μία σβηστή λάμπα, με την συνθήκη ότι ανάμεσα δυο αναμμένες λάμπες δεν υπάρχει σβηστή λάμπα. Να βρείτε με πόσους τρόπους μπορούμε να ανάψουμε τις λάμπες με αυτή τη συνθήκη.
(Βιβλίο Μαθηματικής Ολυμπιάδας της Περσίας)
6. Ένας 3×3 πίνακας λέγεται καλός αν οι αριθμοί σε κάθε γραμμή και στήλη αυξάνονται (από αριστερά προς δεξιά και από πάνω προς τα κάτω). Να βρείτε με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετούμε τους αριθμούς $1, 2, 3, \dots, 9$ σε ένα 3×3 πίνακα, έτσι ώστε να έχουμε ένα καλό πίνακα.
(Βιβλίο μαθηματικής Ολυμπιάδας της Περσίας)
7. Έστω P ένα κανονικό $2n$ -γωνο $A_1 A_2 \dots A_{2n}$ στο επίπεδο όπου n θετικός ακέραιος. Λέμε ότι ένα σημείο S που βρίσκεται σε μια πλευρά του P είναι ορατό από ένα σημείο E εξωτερικό του P , εάν το ευθύγραμμο τμήμα SE δεν περιέχει άλλα σημεία των πλευρών του P εκτός από το S . Χρωματίζουμε τις πλευρές του P με 3 διαφορετικά χρώματα (αγνοήστε τις κορυφές του P , τις οποίες δεν χρωματίζουμε) έτσι ώστε κάθε πλευρά να χρωματίζεται με ακριβώς ένα χρώμα και κάθε χρώμα να χρησιμοποιείται τουλάχιστον μία φορά. Επιπλέον, από κάθε σημείο του επιπέδου εξωτερικά του P , είναι ορατά σημεία του P το πολύ δύο διαφορετικών χρωμάτων. Να βρείτε το πλήθος των διαφορετικών χρωματισμών του P (δυο χρωματισμοί είναι διαφορετικοί αν τουλάχιστον μία πλευρά χρωματίζεται διαφορετικό χρώμα).
(JBMO 2017)

Λύσεις

1. Τα ψηφία του αριθμού είναι από τα σύνολα $\Sigma_1 = \{3,0,0,0,0\}$, $\Sigma_2 = \{2,1,0,0,0\}$, ή $\Sigma_3 = \{1,1,1,0,0\}$.

Σύνολο	Πλήθος των αριθμών
$\Sigma_1 = \{3,0,0,0,0\}$	Αφού το πρώτο ψηφίο πρέπει να είναι μη-μηδενικός έχουμε 1 αριθμό
$\Sigma_2 = \{2,1,0,0,0\}$	Αν το πρώτο ψηφίο είναι 2, το «1» μπορεί να πάει σε 4 θέσεις. Όμοια έχουμε 4 αριθμούς. Αν το πρώτο ψηφίο είναι 1. Άρα έχουμε συνολικά 8 αριθμούς .
$\Sigma_3 = \{1,1,1,0,0\}$	Πρέπει να επιλέξουμε τις θέσεις για το μηδέν. Αφού το πρώτο ψηφίο πρέπει να είναι μη-μηδενικός έχουμε συνολικά $\binom{4}{2} = 6$ αριθμούς

Άρα από την αρχή απαρίθμησης έχουμε συνολικά $1 + 8 + 6 = 15$ τέτοιους αριθμούς.

2. Είναι φανερό ότι το εστιατόριο δεν μπορεί να σερβίρει 2 διαφορετικά φαγητά και πρέπει να σερβίρει κάθε φαγητό το πολύ 3 φορές, άρα διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις.

Περίπτωση 1 : Δύο φαγητά σερβίρονται 3 φορές και ένα φαγητό 1 φορά.

Εδώ έχουμε $\binom{3}{1}\binom{7}{1} \cdot 2 = 42$ διαφορετικά προγράμματα.

Περίπτωση 2 : Δύο φαγητά σερβίρονται 2 φορές και ένα φαγητό 3 φορές.

Εδώ και έχουμε $\binom{3}{1}\binom{7}{1} \cdot 2 \cdot 2 = 84$ διαφορετικά προγράμματα.

Άρα έχουμε συνολικά $42 + 84 = 126$ διαφορετικά προγράμματα.

3. Στο πρόβλημα μας έχουμε 4 περιπτώσεις.

Περίπτωση 1 :Έχουμε 3 ομάδες των δύων. Εδώ έχουμε $\frac{\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2}}{3!} = 15$ διαφορετικούς τρόπους. (Διαιρούμε την απάντηση μας με $3!$ αφού μετρήσαμε κάθε συνδυασμό $\{\alpha, \beta\}, \{\gamma, \delta\}, \{\varepsilon, \zeta\}$ 3! φορές)

Περίπτωση 2 :Έχουμε 2 ομάδες των δύων και 2 ομάδες του ενός. Εδώ έχουμε $\frac{\binom{6}{2}\binom{4}{2}}{2!} = 45$ διαφορετικούς τρόπους.

Περίπτωση 3 :Έχουμε 1 ομάδες των δύων και 4 ομάδες του ενός. Εδώ έχουμε $\binom{6}{2} = 15$ διαφορετικούς τρόπους.

Περίπτωση 4 :Έχουμε 5 ομάδες του ενός. Εδώ έχουμε 1 τρόπο.

Άρα έχουμε συνολικά $15 + 45 + 15 + 1 = 76$ διαφορετικούς τρόπους.

4. *Σε μία επιτυχημένη ακολουθία υπάρχει το πολύ 3 στοιχεία -1 και ανάμεσα δύο στα στοιχεία -1 πρέπει να έχουμε τουλάχιστον δύο στοιχεία 1 . Είναι φανερό ότι έχουμε 1,7 και 1 ακολουθίες με 0,1 και 3 στοιχεία -1 αντίστοιχα. Αλλά η ακολουθία με 2 στοιχεία -1 θα είναι της μορφής $(\dots, -1, \dots, -1, \dots)$ και για το πλήθος των τρόπων που μπορούμε να τοποθετούμε 1 στα κενά, θα λύσουμε η εξίσωση $x_1 + x_2 + x_3 = 5$ στους ακέραιους με την συνθήκη $x_1 \geq 0, x_2 \geq 2$ και $x_3 \geq 0$. Όμοια με το παράδειγμα και για 5 στοιχεία. Το πλήθος των λύσεων είναι $\binom{5}{2} = 10$. Άρα έχουμε συνολικά $1 + 7 + 1 + 10 = 19$ διαφορετικές επιτυχημένες ακολουθίες.

5. Αν για ένα παράδειγμα θέλουμε να ανοίξουμε την έκτη λάμπα, τότε η τέταρτη και έβδομη λάμπα πρέπει να είναι ανοικτές. Η έκτη λάμπα έχει 4 λάμπες στα δεξιά της και 5 λάμπες στα αριστερά της. Το άνοιγμα μια λάμπας από τα δεξιά θα συμβολίζετε με Δ και από αριστερά με Α. Για παράδειγμα ΔΑΑΔΔΑΔΑΑ είναι ένας τρόπος με τον οποίο μπορούμε να ανοίξουμε τις λάμπες και μετά να ανοίξουμε την έκτη λάμπα. Υπάρχει $\frac{9!}{4!5!} = \binom{9}{4}$ διατάξεις για αυτό το τρόπο. Έτσι για την επιλογή της κάθε λάμπα, έχουμε συνολικά :

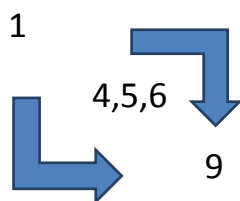
$$\binom{9}{0} + \binom{9}{1} + \binom{9}{2} + \dots + \binom{9}{9} = 2^9 = 512 \text{ διαφορετικούς τρόπους.}$$

6. Ονομάζουμε τα κελιά με αυτό τον τρόπο :

	A	B	C
1			
2			
3			

Ο Αριθμός 1 πρέπει να είναι στο A1 και 9 στο C3. Οι αριθμοί 2,3,7 και 8 δεν μπορούν να τοποθετούνται στο B2. Αρά θα έχουμε τρεις περιπτώσεις.

Περίπτωση 1 (Το 4 είναι στο B2):



Οι αριθμοί αυξάνονται στην κατεύθυνση των βελών. Επίσης Οι αριθμοί 2 και 3 δεν μπορούν να τοποθετούνται στο ίδιο “L σχήμα” .

Επιλέξουμε ένας αριθμός από 2 η 3 και θα επιλέξουμε 2 από τους άλλους αριθμούς για να συμπληρώσουμε ένα “L σχήμα” . Τότε η απάντηση θα είναι $2 \times \binom{4}{2} = 12$

Περίπτωση 2 (Το 5 είναι στο B2):

Ο μόνος περιορισμός είναι ότι δεν μπορούμε να τοποθετήσουμε τους αριθμούς 2,3 και 4 στο ίδιο “L σχήμα” Τότε η απάντηση θα είναι: $\binom{6}{3} - 2 = 18$

Περίπτωση 3 (Το 6 είναι στο B2):

Όμοια με την περίπτωση 1 η απάντηση θα είναι 12.

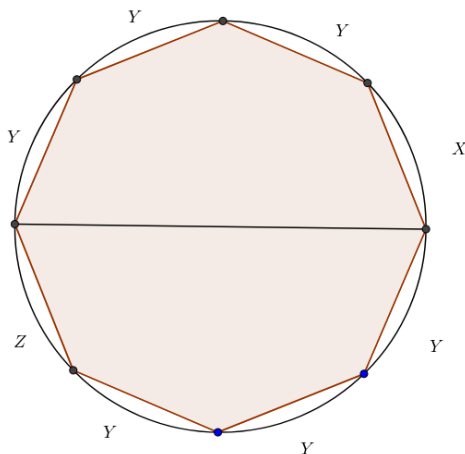
Άρα έχουμε συνολικά $12 + 18 + 12 = 48$ διαφορετικούς τρόπους.

7. **Ισχυρισμός:** Κάθε n διαδοχικές πλευρές του πολύγωνου είναι όλες ορατές από ένα σημείο του επίπεδου.

Απόδειξη: Έστω ότι πολύγωνο είναι εγγεγραμμένο σε ένα κύκλο. Υπάρχει ένα σημείο πολύ μακριά από το κύκλο που είναι ορατό από κάθε ημικύκλιο του κύκλου.

Έτσι για κάθε ζευγάρι πλευρών υπάρχει ένα σημείο που είναι ορατό από αυτές τις πλευρές εκτός από δύο πλευρές που είναι παράλληλες (αφού οι παράλληλες δεν τέμνονται και έτσι δεν υπάρχει ένα σημείο ορατό από τις δυο πλευρές).

Μπορούμε να χρωματίσουμε n διαδοχικές πλευρές με δύο χρώματα το πολύ. Ας χρωματίσουμε το πολύγωνο με 2 χρώματα X και Y έτσι ώστε ένα χρώμα θα χρειαστεί τουλάχιστον 2 φορές. Τώρα ας αλλάξουμε το ένα χρώμα από αυτές τις πλευρές με ένα χρώμα Z , τότε υπάρχει n διαδοχικές πλευρές με 3 διαφορετικά χρώματα που είναι άτοπο. Άρα ένα χρώμα έχει χρειαστεί μόνο μία φορά, ας πούμε X . Τώρα ας χρωματίσουμε όλες τις άλλες πλευρές με το χρώμα Y και μία άλλη πλευρά με το χρώμα Z , αυτή η πλευρά μόνο επιτρέπεται να είναι παράλληλη με την πλευρά χρώματος X , αφού στις άλλες περιπτώσεις υπάρχει n διαδοχικές πλευρές χρωματισμένα με 3 χρώματα. Έτσι επιλέξουμε δυο παράλληλες πλευρές δυο χρώματα και τις θέσεις των χρωμάτων. Αρά η απάντηση είναι $\binom{3}{2} \cdot n \cdot 2 = 6n$



Αλλά ειδικές περιπτώσεις είναι :

Για $n = 2$, έχουμε το τετράγωνο και το πολύ 2 διαδοχικές πλευρές είναι ορατά από σημεία του επίπεδου. Έτσι δεν έχουμε συνθήκη, άρα πρέπει να επιλέξουμε δυο πλευρές που θα έχουν το ίδιο χρώμα. Αρά η απάντηση είναι $\binom{4}{2} \cdot 3 \cdot 2 = 36$

Για $n = 3$, έχουμε το εξάγωνο, μπορούμε να έχουμε την περίπτωση $6n$ ή την περίπτωση για την οποία χρωματίσουμε κάθε 2 διαδοχικές πλευρές σε ένα χρώμα. Έτσι η απάντηση είναι $6 \cdot 3 + 6 \cdot 2 = 30$

2

Βελτιστοποίηση

Στα μαθηματικά διατυπώνεται ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης σαν πρόβλημα ελαχιστοποίησης ή μεγιστοποίησης μιας συνάρτησης μίας μεταβλητής ή πολλών μεταβλητών. Ας δούμε και ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 1: Σε ένα χωριό με 100 γάτες, για κάθε 10 γάτες υπάρχουν τουλάχιστον 4 πού είναι γκρίζες. Να βρείτε το ελάχιστο πλήθος για τις γκρίζες γάτες.

Λύση: Έστω ότι υπάρχουν 7 γάτες που δεν είναι γκρίζες, τότε αν επιλέξουμε 3 γκρίζες γάτες, υπάρχει μία ομάδα 10 γάτων που έχει μόνο 3 γκρίζες γάτες. Έτσι υπάρχουν το πολύ 6 γάτες που δεν είναι γκρίζες, δηλαδή το ελάχιστο πλήθος είναι 94. Αν εξετάσουμε το 94, μπορούμε να δούμε ότι ισχύει το ζητούμενο και άρα η απάντηση είναι 94.

Θεώρημα 1(Αρχή της περιστεροφωλιάς)

Αν m περιστέρια εισέλθουν σε n φώλια και

$m > nk$ τότε υπάρχει μια φωλιά που περιέχει τουλάχιστον $k + 1$ περιστέρια.

Εφαρμογή: Αν m περιστέρια εισέλθουν σε n φωλιές τότε υπάρχει μια φωλιά που περιέχει τουλάχιστον $\left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil$, όπου το ανώτατο όριο του $\frac{m}{n}$ εκφράζει το μικρότερο ακέραιο που είναι μεγαλύτερο ή ίσο με $\frac{m}{n}$.

Π.χ. Ανάμεσα σε 25 ανθρώπους υπάρχουν τουλάχιστον τρεις που γεννήθηκαν τον ίδιο μήνα, αφού έχουμε 12 μήνες και $\left\lceil \frac{25}{12} \right\rceil = 3$

Παράδειγμα 2 Ένας τενίστας έπαιξε 13 αγώνες για 8 ημέρες. Να δείξετε ότι υπάρχουν 2 συνεχόμενες ημέρες που να έπαιξε τουλάχιστον 4 αγώνες.

(Βιβλίο Μαθηματική Ολυμπιάδα Περσίας)

Λύση: Ομαδοποιούμε τους αγώνες που έπαιξε, σε ομάδες ανάλογα με τις ημέρες που έπαιξαν, σε ζευγάρια των δύο. Οι αγώνες που έπαιξε στη 1^η και 2^η σε μία ομάδα και ούτω καθεξής. (Ημέρα 1, Ημέρα 2), (Ημέρα 2, Ημέρα 3), (Ημέρα 4, Ημέρα 5), (Ημέρα 6, Ημέρα 7)

Έτσι οι 13 αγώνες χωρίζονται σε 4 ομάδες και έτσι σύμφωνα με την αρχή της περιστροφωλίας, υπάρχει ένα ζευγάρι διαδοχικών ημερών, στις οποίες ο τενίστας έπαιξε τουλάχιστον $\left\lceil \frac{13}{4} \right\rceil = 4$ αγώνες.

Προβλήματα

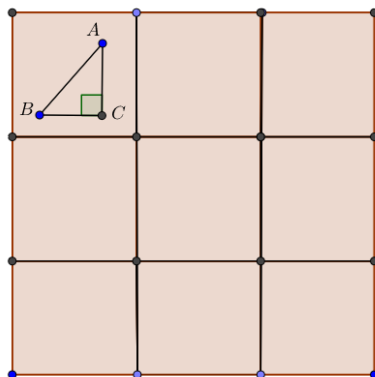
1. Επιλέγουμε 11 αριθμούς από το σύνολο $A = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$. Να δείξετε ότι ανάμεσα σε αυτούς τους αριθμούς υπάρχουν τουλάχιστον 2 αριθμοί με άθροισμα 21.
2. Δίνονται 10 σημεία σε ένα $3 \text{ cm} \times 3 \text{ cm}$ τετράγωνο. Να δείξετε ότι ανάμεσα σε αυτά τα σημεία υπάρχουν 2 σημεία που απέχουν τουλάχιστον $\sqrt{2} \text{ cm}$.
3. Σε έναν πίνακα γράφουμε όλους τους αριθμούς από το 1 μέχρι το 50. Πόσους τουλάχιστον πρέπει να διαγράψουμε, ώστε το άθροισμα κάθε δύο από τους υπόλοιπους να μην είναι πρώτος;
(JBMO Shortlist 2016)
(Πρώτο γύρο Περσικής Ολυμπιάδας)
4. Δίνεται ένας 10×10 πίνακας με στοιχεία 1, -1 και 0. Υπάρχει ένας πίνακας, έτσι ώστε το άθροισμα των στοιχείων κάθε γραμμής, στήλης και διαγωνίου να είναι διαφορετικό;
(Περσική Ολυμπιάδα Πληροφορικής)
5. Σε κάθε κελί ενός πίνακα $1 \times n$ τοποθετούμε έναν από τους πρώτους αριθμούς p_1, p_2 ή p_3 . Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του n , έτσι ώστε να υπάρχουν κάποια διαδοχικά κελιά, στα οποία το γινόμενο των αριθμών ανάμεσα τους να είναι ένας τέλειος κύβος.

Σημείωση: Ένας τέλειος κύβος είναι ένας αριθμός της μορφής λ^3 όπου λ είναι ακέραιος.

(Περσική Ολυμπιάδα Πληροφορικής- Με πολλές αλλαγές)

Λύσεις

1. Διαιρούμε το σύνολο A σε 10 υποσύνολα $\{1,20\}, \{2,19\}, \{3,18\}, \{4,17\}, \dots, \{10,11\}$ με άθροισμα 21. Αφού επιλέξουμε 11 αριθμούς, τότε από την αρχή της περιστεροφωλίας, τουλάχιστον $\left\lceil \frac{11}{10} \right\rceil = 2$ από τους αριθμούς θα είναι στο ίδιο υποσύνολο, δηλαδή θα έχουν άθροισμα 21.
2. Διαιρούμε το τετράγωνο σε 9 1×1 τετραγωνάκια. Από την αρχή της περιστεροφωλίας, $\left\lceil \frac{10}{9} \right\rceil = 2$ από αυτά τα σημεία θα ανήκουν στο ίδιο τετραγωνάκι. Αν τα σημεία αυτά είναι τα A και B , κατασκευάζουμε το ορθογώνιο τρίγωνο ABC με δύο πλευρές παράλληλες προς τις πλευρές του τετραγώνου. Έτσι από το πυθαγόρειο θεώρημα $AB^2 = AC^2 + BC^2 \leq 1 + 1 = 2$ δηλαδή $AB \leq \sqrt{2}$, και το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.



3. Διαιρούμε το σύνολο $A = \{1,2,3,\dots,50\}$ σε 25 υποσύνολα $\{1,2\}, \{3,50\}, \{4,49\}, \dots, \{26,27\}$, με αθροίσματα 3 και 53. Αν διαγράψουμε 24 αριθμούς, τότε έχουμε 26 αριθμούς. Έτσι, από την αρχή της περιστεροφωλίας, δύο από τους αριθμούς θα είναι στο ίδιο υποσύνολο και έτσι το άθροισμα τους θα είναι πρώτος. Τώρα αν διαγράψουμε 25 αριθμούς, (όλους τους περιττούς) τότε θα έχουμε άρτιους αριθμούς με άθροισμα κάθε δυο από αυτούς που είναι μεγαλύτερος του 2. Άρα η απάντηση είναι 25.
4. Η ελάχιστη τιμή του αθροίσματος των στοιχείων 10 κελιών είναι -10 και η μέγιστη τιμή του είναι 10. Έτσι το άθροισμα στοιχείων κάθε στήλης, γραμμής και διαγωνίου μπορεί να πάρει 21 δυνατές τιμές. Αλλά έχουμε 22 στήλες, γραμμές και

διαγωνίους. Άρα από την αρχή της περιστροφωλίας $\lceil \frac{22}{21} \rceil = 2$ από αυτά τα αθροίσματα είναι ίσα. Άρα η απάντηση είναι όχι.

5. Έστω ότι S_i , συμβολίζει το γινόμενο των στοιχείων του πρώτου i κελιού του πίνακα. Κάθε τέτοιο γινόμενο μπορεί να γραφτεί στη μορφή $p_1^a p_2^b p_3^c$ όπου a, b, c είναι μη-αρνητικοί ακέραιοι.

Αφού $a, b, c \equiv 0, 1$ ή $2 \pmod{3}$, οι δυνατοί υπόλοιποι συνδυασμοί που a, b και c μπορούν να φέρουν $\pmod{3}$ (με σειρά) είναι $3 \times 3 \times 3 = 27$.

Από την αρχή της περιστροφωλίας, αν $n = 28$, για τους αριθμούς $S_1, S_2, \dots, S_{28}$ υπάρχουν δύο τριάδες ακεραίων (a, b, c) και (x, y, z) , έτσι ώστε:

$$a \equiv x \pmod{3}, b \equiv y \pmod{3}, c \equiv z \pmod{3}$$

Δηλαδή:

$$a - x = 3k_1, \quad b - y = 3k_2, \quad c - z = 3k_3$$

Έτσι $S_i = p_1^a p_2^b p_3^c$ και $S_j = p_1^x p_2^y p_3^z$, δηλαδή

$$\frac{S_i}{S_j} = p_1^{3k_1} p_2^{3k_2} p_3^{3k_3},$$

Άρα, $n_{\min} = 28$. (28 είναι ο ελάχιστος αριθμός διαδοχικών κελιών που το γινόμενο τους να είναι τέλειος κύβος). Για $n = 27$ μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα πίνακα που δεν ικανοποιεί τη συνθήκη του προβλήματος.

3

Αναλλοίωτες

Σε αυτό το κεφάλαιο θα υπάρχει για κάθε πρόβλημα ένα σημείο αφετηρίας, κάποια βήματα και ένα τελικό σημείο. Σε κάποια προβλήματα μπορούμε να φτάσουμε σε αυτό το σημείο και σε κάποια άλλα όμως όχι. Όταν κάτι σε σχέση με το πρόβλημα παραμένει το ίδιο, λέμε ότι η σχέση είναι αναλλοίωτη. Ας δούμε κάποια παραδείγματα.

Παράδειγμα 1 Δίνεται η σειρά $\alpha\beta\beta\alpha\alpha\beta\beta$. Σε κάθε βήμα μπορούμε να αλλάξουμε το γράμμα ή τα γράμματα στις θέσεις $i \leq 6$ και $i + 2$. Μπορούμε να φτιάξουμε τη σειρά $\alpha\beta\beta\alpha\beta\alpha\beta$.

Λύση: Σε κάθε βήμα τα γράμματα που μπορούν να αλλάζουν είναι δύο θέσεις με άρτιο αριθμό ή δύο σε θέσεις με περιττό αριθμό. Έτσι το πλήθος των γραμμάτων α και β σε θέσεις με περιττούς αριθμούς είναι αναλλοίωτο. Αλλά αυτά είναι διαφορετικά στις σειρές του προβλήματός μας. Άρα το ζητούμενο είναι αδύνατο.

Παράδειγμα 2 Δίνεται ένας 4×4 πίνακας με στοιχεία 0. Σε κάθε βήμα μπορούμε να επιλέξουμε 4 κελιά, που δεν είναι στην ίδια γραμμή και στήλη, και να προσθέτουμε ή να αφαιρέσουμε από όλα τα στοιχεία τους 1. Με αυτό τον τρόπο, να δείξετε ότι δεν μπορούμε να φτάσουμε στο παρακάτω πίνακα.

(Πρώτος γύρος Περσικής Ολυμπιάδας- με λίγες αλλαγές)

Λύση:

Αφού σε κάθε βήμα το άθροισμα στοιχείων κάθε στήλης αλλάζει με 1 μονάδα, τότε αυτά τα αθροίσματα θα μείνουν ίσα μετά από κάθε βήμα. Αλλά στον παραπάνω πίνακα το άθροισμα της πρώτης στήλης είναι διαφορετικό από το άλλο. Άρα το ζητούμενο ισχύει.

Προβλήματα

1. Μπορούμε να βρούμε 5 σημεία με ακέραιες συντεταγμένες πάνω σε μία ευθεία, έτσι ώστε οι αποστάσεις αυτών των σημείων (χωρίς σειρά) να είναι $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.

(Περσική Ολυμπιάδα Πληροφορικής)

2. Έχουμε ένα βάτραχο πάνω στον άξονα τετμημένων ενός επιπέδου στο σημείο $(0, 0)$. Στο πρώτο του άλμα πάει 1 μονάδα δεξιά ή αριστερά και στο n -οστό του άλμα πάει 5^{n-1} μονάδες δεξιά ή αριστερά. Να δείξετε ότι ο βάτραχος δεν μπορεί να φτάσει στο σημείο $(2017, 0)$.

(Περσική Ολυμπιάδα Πληροφορικής- Με αλλαγές)

3. Μπορούμε να σημειώσουμε 7 κελιά σε ένα 8×8 πίνακα, έτσι ώστε το πλήθος των σημειωμένων γειτονικών κελιών να είναι περιττός αριθμός; Δύο κελιά λέγονται γείτονες όταν έχουν τουλάχιστον μία κοινή πλευρά.

(Περσική Ολυμπιάδα Πληροφορικής)

4. Στον πίνακα είναι γραμμένοι οι αριθμοί $\alpha_1 = 2015$, $\beta_1 = 2016$ και $\gamma_1 = 2017$. Κάποιος παίζει το εξής παιχνίδι, ακολουθώντας τα εξής βήματα:

Βήμα 1^ο: Διαγράφει από τον πίνακα δύο από τους αριθμούς $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ (έστω ότι διαγράφει τους α_1, β_1) και στην θέση τους γράφει τους αριθμούς

$$\alpha_2 = 2\alpha_1 - \beta_1 \text{ και } \beta_2 = 2\beta_1 - \alpha_1.$$

Τότε στον πίνακα είναι γραμμένοι οι αριθμοί $\alpha_2, \beta_2, \gamma_1$.

Βήμα 2^ο : Διαγράφει από τον πίνακα δύο από τους αριθμούς $\alpha_2, \beta_2, \gamma_1$ (έστω ότι διαγράφει τους β_2, γ_1) και στην θέση τους γράφει τους αριθμούς

$$\beta_3 = 2\beta_2 - \gamma_1 \text{ και } \gamma_2 = 2\gamma_1 - \beta_2.$$

Τότε στον πίνακα είναι γραμμένοι οι αριθμοί $\alpha_2, \beta_3, \gamma_2$. Η ίδια διαδικασία επαναλαμβάνεται και στα επόμενα βήματα. Να εξετάσετε αν μετά από κάποιο πλήθος βημάτων είναι δυνατόν οι δύο από τους τρεις αριθμούς που είναι γραμμένοι στον πίνακα να είναι ταυτόχρονα ίσοι με το μηδέν.

(Διαγωνισμός επιλογής Κύπρου για JBMO 2017)

Λύσεις

1. Έστω ότι αυτά τα σημεία έχουν συντεταγμένες $(x_1, 0), (x_2, 0), \dots, (x_5, 0)$

$$\text{Με } x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5$$

Η απόσταση δύο σημείων με συντεταγμένες $(x_i, 0)$ και $(x_j, 0)$ ισούται με $x_i - x_j$ όπου $x_i > x_j$. Άρα το άθροισμα όλων των αποστάσεων ισούται με:

$$\begin{aligned} & (x_5 - x_4) + (x_5 - x_3) + (x_5 - x_2) + \dots + (x_2 - x_1) \\ & = 4x_5 + 2x_4 - 2x_2 - 2x_1 \equiv 0 \pmod{2} \end{aligned}$$

Και έτσι είναι αναλλοίωτη $\pmod{2}$.

Αλλά το άθροισμα όλων των αποστάσεων ισούται με:

$$\begin{aligned} & 1 + 2 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 \\ & = 42 \equiv 0 \pmod{2} \end{aligned}$$

Και έτσι το ζητούμενο είναι αδύνατο.

Άρα η απάντηση είναι όχι.

2. Μετά από το πρώτο του άλμα ο βάτραχος θα καταλήξει στο σημείο $(1,0)$ ή στο σημείο $(-1,0)$ και ύστερα σε κάθε άλμα θα πάει 5^i μονάδες που είναι πολλαπλάσιο του 5. Άρα, θα καταλήξει σε ένα σημείο στην μορφή

$(5\lambda + 1, 0)$, ή σε ένα σημείο στη μορφή

$(5\lambda - 1, 0)$, δηλαδή είναι αναλλοίωτη $\pmod{5}$. Αλλά $2017 \equiv 2 \pmod{5}$ και έτσι το ζητούμενο είναι αδύνατο.

3. Πρώτα, αν έχουμε 7 σημειωμένες γειτονιές με περιττό αριθμό τότε το άθροισμα αυτών των περιττών αριθμών θα είναι περιττός (αφού το άθροισμα 7 περιττών αριθμών είναι πάντα περιττό). Αλλά αν ένα κελί A είναι γείτονας με το κελί B τότε το B είναι γείτονας του A. Άρα το άθροισμα (πλήθος) των γειτόνων των σημειωμένων κελίων είναι άρτιος αριθμός (είναι αναλλοίωτη). Άρα το ζητούμενο είναι αδύνατο.

4. Το άθροισμα των αριθμών πάνω στον πίνακα είναι αναλλοίωτο, αφού

$$2x - y + 2y - x + z = x + y + z$$

Έτσι, αν είναι δυνατόν οι δύο από τους τρεις αριθμούς που είναι γραμμένοι στον πίνακα να είναι ταυτόχρονα ίσοι με το μηδέν, τότε έχουμε τους αριθμούς 6048, 0, 0 πάνω στον πίνακα, διότι το άθροισμα στην αρχή ήταν $2015 + 2016 + 2017 = 6048$.

Μετά από κάθε βήμα με τους αριθμούς x, y, z

$$(2x - y)^2 + (2y - x)^2 + z^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 \pmod{4}$$

Και έτσι το άθροισμα των τετραγώνων των αριθμών είναι αναλλοίωτο $\pmod{4}$. Αλλά

$$2015^2 + 2016^2 + 2017^2 \equiv 2 \pmod{4}$$

Και $6048^2 + 0^2 + 0^2 \equiv 0 \pmod{4}$ και έτσι το ζητούμενο είναι αδύνατο.

Τελική Εξέταση: Προχωρημένο επίπεδο

1. Να βρείτε όλες τις τριάδες των θετικών ακέραιων (a, b, c) που ικανοποιούν την εξίσωση

$$a^3 + b^3 - 3ab = 2017^c + 1$$

(από τον Δάτη Καλάλη - συγγραφέας)

2. Αν a, b, c είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί έτσι ώστε $a + b + c = 1$ να δείξετε ότι

$$\frac{1}{a+bc} + \frac{1}{b+ac} + \frac{1}{c+ab} + 4abc < \frac{5}{16abc}$$

(από τον Δάτη Καλάλη - συγγραφέας)

3. Δίνεται το σταθερό κανονικό εννεάγωνο $A_1A_2 \dots A_9$ στο επίπεδο. Τρεις κορυφές του εννεάγωνου λέγονται «κανονική τριάδα» όταν σχηματίζουν ένα ισόπλευρο τρίγωνο. Σημειώνουμε κάθε κορυφή του εννεάγωνου με τους αριθμούς 0 ή 1. Ένα εννεάγωνο λέγεται «τακτοποιημένο» όταν δεν έχει 3 διαδοχικές κορυφές σημειωμένα με τον αριθμό μηδέν. Να βρείτε με πόσους τρόπους μπορούμε να σημειώνουμε το εννεάγωνο, έτσι ώστε οι αριθμοί κάθε «κανονικής τριάδας» να έχουν άθροισμα 2 και το εννεάγωνο να είναι «τακτοποιημένο».

(από τον Δάτη Καλάλη - συγγραφέας)

4. Δίνεται το τρίγωνο ABC ($AB < AC$) με περιγεγραμμένο κύκλο (Γ) και περίκεντρο O . Οι εφαπτόμενες στο (Γ) από τα σημεία B και C τέμνονται στο σημείο K και το OK τέμνει την πλευρά BC στο σημείο Z . Η ευθεία BO τέμνει τις ευθείες AZ και AC στα σημεία M και X αντίστοιχα και την ευθεία MC τέμνει την AB στο σημείο Y . Να δείξετε ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου AXY και ο κύκλος (Γ) εφάπτονται.

(από τον Δάτη Καλάλη - συγγραφέας)

5. Αν x, y και z είναι διαφορετικοί θετικοί ακέραιοι να δείξετε ότι:

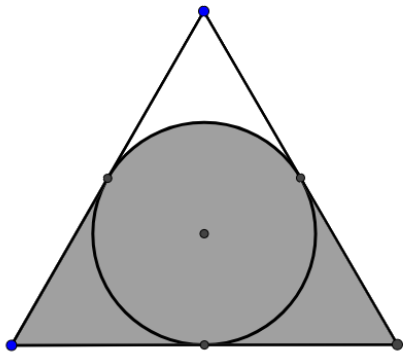
$$2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 - 4) \geq (x + y + z)(2xyz + 3) \text{ Πότε ισχύει η ισότητα;}$$

(από τον Δάτη Καλάλη - συγγραφέας)

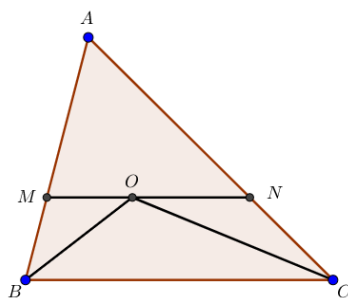
Τελική εξέταση: Επίπεδο Γ' Γυμνασίου

(Εθνικό επίπεδο-Χωρίς λύσεις).

1. Αν α και β είναι πραγματικοί αριθμοί έτσι ώστε $\alpha^2 + \beta = 7$ και $\beta^2 + \alpha = 11$, η τιμή της παράστασης $\alpha^2 + \beta^2$ είναι:
(Βιβλίο μαθηματική ολυμπιάδα της Περσίας)
Α) 13 Β) 14 Γ) 15 Δ) 15 Ε) 12
2. Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο είναι ισοσκελές με πλευρές 6 cm και ο κύκλος εφάπτεται σε όλες τις πλευρές του τριγώνου. Το εμβαδόν του σκιαγμένου μέρους (σε cm^2) ισούται με:
(Μαθηματική ολυμπιάδα της Περσίας για Νέων)

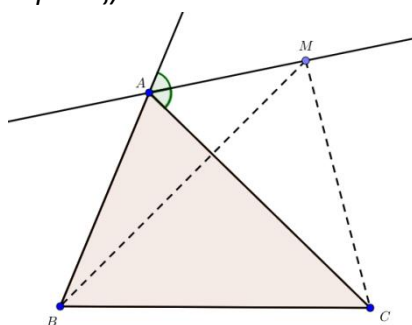


- Α) $\pi + 6\sqrt{3}$ Β) $\pi + \sqrt{3}$ Γ) $\pi + 5\sqrt{3}$ Δ) $\frac{\pi}{2} + 2\sqrt{3}$ Ε) $\frac{\pi}{2} + 4\sqrt{3}$
3. Έστω ότι $(1 - 2x)^{2017} = a_{2017}x^{2017} + a_{2016}x^{2016} + \dots + a_0$ τότε η τιμή της παράστασης $K = a_0 + a_1 + \dots + a_{2017}$ είναι:
(Βιβλίο μαθηματική ολυμπιάδα της Περσίας-Με λίγες αλλαγές)
Α) 1 Β) -1 Γ) 2^{2017} Δ) 2017 Ε) 0
 4. Ένα σύνολο των θετικών ακέραιων λέγεται καλό, αν μπορούμε να διαιρέσουμε το σύνολο σε δύο υποσύνολα που έχουν ίσα αθροίσματα στοιχείων. Ποιο από τα παρακάτω σύνολα είναι καλό;
(Μαθητικός διαγωνισμός των Ταλαντούχων της Περσίας)
Α) $\{1, 2, 3, \dots, 21\}$ Β) $\{1^1, 2^2, 2^3, \dots, 2^{10}\}$ Γ) $\{1, 2, 3, \dots, 20\}$
Δ) $\{1^2, 2^2, \dots, 10^2\}$ Ε) Κανένα από τα προηγούμενα
 5. Στο παρακάτω σχήμα το BO και CO είναι οι διχοτόμοι του τριγώνου και MN είναι η παράλληλη που περνά από το σημείο O προς την BC . Αν $AB = 7\text{ cm}$, $BC = 8\text{ cm}$ και $AC = 9\text{ cm}$, η περίμετρος του τριγώνου AMN (σε cm) ισούται με:
(Βιβλίο μαθηματική ολυμπιάδα της Περσίας)



- A) 12 B)13 Γ)14 Δ)15 Ε)16

6. Έστω ότι M είναι τυχαίο σημείο πάνω στην εξωτερική διχοτόμο της γωνιάς A του τριγώνου ABC . Ποιο από τις παρακάτω ανισότητες είναι πάντα σωστή;
(Βιβλίο μαθηματική ολυμπιάδα της Περσίας)



- A) $MB + MC > AB + AC$ B) $MA + MB > 2MC$ Γ) $MB - MC > AB - AC$
Δ) $MA + MB < BC + CD + DA$ Ε) Κανένα από τα προηγούμενα

7. Το ψηφίο των μονάδων του αριθμού

$$A = 1^{101} + 2^{101} + \dots + 9^{101} \text{ είναι:}$$

(Πρώτο γύρο Περσικής Ολυμπιάδας)

- A) 0 B)5 Γ)6 Δ)7 Ε)8

8. Ο πλήθος των πραγματικών λύσεων του συστήματος Σ είναι:

$$\Sigma: \begin{cases} x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3 \\ x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 6 \end{cases}$$

(Βιβλίο μαθηματική ολυμπιάδα της Περσίας)

- A) 0 B)1 Γ)2 Δ)3 Ε) Άπειρος

9. Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέγουμε 3 υποσύνολα με 2 στοιχεία από το σύνολο $\Sigma = \{1,2,3,4,5,6\}$, έτσι ώστε κάθε δυο υποσύνολα να έχουν ένα κοινό στοιχείο;

(Πρώτο γύρο Περσικής Ολυμπιάδας)

- A) 20 B)40 Γ)50 Δ)60 Ε)80

10. Αν α , β και γ είναι πραγματικοί αριθμοί, έτσι ώστε $\alpha + \beta + \gamma = 0$ και $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 4$, η τιμή του $\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4$ είναι:

(Βιβλίο μαθηματική ολυμπιάδα της Περσίας)

A) 1 B) 2 Γ) 4 Δ) 8 Ε) 4 ή 8

11. Στην ιστοσελίδα της Μαθηματικής Εταιρείας υπάρχει μια επισκόπηση, η οποία ζητάει τη γνώμη σας για την περσινή Μαθηματική Ολυμπιάδα. Έχει τις τρεις εξής επιλογές, που είναι «Εύκολο», «Δύσκολο» και «Εξαιρετικό». Πριν από τη συμμετοχή του Γιώργου στην επισκόπηση η στατιστική ήταν ανάλογα «Εύκολο» 25%, «Δύσκολο» 50% και «Εξαιρετικό» 25%. Αλλά μετά από την συμμετοχή του η στατιστική έγινε «Εύκολο» 24%, «Δύσκολο» 48% και «Εξαιρετικό» 28%. Εκτός από τον Γιώργο, πόσοι άλλοι συμμετείχαν σε αυτή την επισκόπηση;

(Πρώτο γύρο Περσικής Ολυμπιάδας-Με λίγες Αλλαγές)

12. Αν $S(n)$ συμβολίζει το άθροισμα ψηφίων του θετικού ακέραιου n , πόσες λύσεις έχει η εξίσωση $S(6^n) + 3 = S(3n) + S(6n)$;

(Βιβλίο μαθηματική ολυμπιάδα της Περσίας)

13. Αν x , y και z είναι πραγματικοί αριθμοί η ελάχιστη τιμή της παράστασης

$$A = 2x^2 + 2y^2 + 5z^2 - 2xy - 4yz - 4x - 2z + 15$$

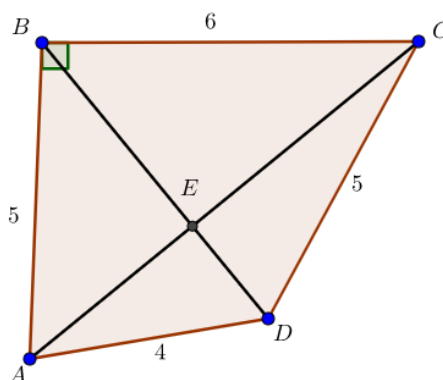
Είναι:

(Stanford 2006)

A) 10 B) 15 Γ) 20 Δ) 25 Ε) 30

14. Στο παρακάτω τετράπλευρο $AB = 5, BC = 6, CD = 5, DA = 4, \angle ABC = 90^\circ$ και οι διαγώνιοι τέμνονται στο E . Ο λόγος $\frac{BE}{DE}$ ισούται με:

(Χάρβαρντ-MIT 2014- Με το σχήμα)



A) $\sqrt{3}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ Γ) $\sqrt{2}$ Δ) 2 Ε) $\frac{3}{2}$

15. Αν για το πραγματικό αριθμό α ισχύει η σχέση $\alpha^2 + \frac{1}{(\alpha-2)^2} = 4\alpha + 19$, η τιμή του

$\alpha + \frac{1}{\alpha-2}$ μπορεί να είναι:

(Βιβλίο μαθηματική ολυμπιάδα της Περσίας)

A) -7 B) 3 Γ) 7 Δ) 4 E) 19

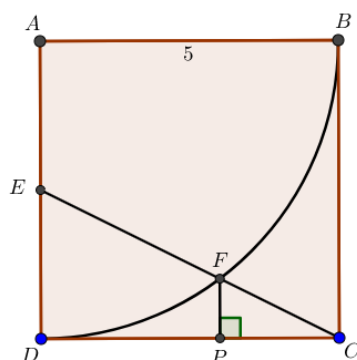
16. Έστω ότι η εξίσωση $a^2x^2 + (a+1)x + a = 0$ έχει μόνο μία πραγματική λύση (με x μεταβλητή), το άθροισμα όλων των δυνατών τιμών του a είναι:

(Βιβλίο μαθηματική ολυμπιάδα της Περσίας)

A) 2 B) 4 Γ) -4 Δ) -2 E) Κανένα από τα προηγούμενα

17. Στο τετράγωνο ABCD με πλευρά 5 σχηματίζουμε ένα κύκλο με ακτίνα AB και κέντρο A. Έστω ότι E είναι το μέσο της AD και F είναι το σημείο τομής της EC με τον κύκλο. Αν P είναι ο ίχνος του F προς την DC, να βρείτε το μήκος του FP.

(Berkley Maths Competition 2014)



18. Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε δυο αριθμούς α και β από το σύνολο $\Sigma = \{1, 2, 3, 4, \dots, 10\}$, έτσι ώστε το κλάσμα $\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}$ είναι ακέραιος;

19. Η ακολουθία $a_0, a_1, a_2, \dots$, όπου $a_0, a_1, a_2, \dots$ θετικοί ακέραιοι, ορίζεται με:

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_n + 1 = 13^{a_n} \end{cases}$$

Το ψηφίο των μονάδων του αριθμού a_{1392} είναι:

(Πρώτο γύρο Περσικής Ολυμπιάδας)

A) 1 B) 5 Γ) 5 Δ) 7 E) 9

20. Έστω ότι $f(x) = \frac{4^x}{4^x+2}$, τότε η τιμή της παράστασης

$A = f\left(\frac{1}{14}\right) + f\left(\frac{2}{14}\right) + \dots + f\left(\frac{13}{14}\right)$ είναι:

(Πρώτο γύρο Περσικής Ολυμπιάδας)

A) 7 B) $8,5$ Γ) $6,5$ Δ) $4,5$ E) $5,5$

Λύσεις

1. Η εξίσωση γράφεται

$$a^3 + b^3 - 3ab + 1 = 2017^c + 2$$

$$\Rightarrow (a + b + 1)(a^2 + b^2 - ab - a - b + 1) = 2017^c + 2$$

Έχουμε ότι $2017^c + 2 \equiv 1^c + 2 \equiv 0 \pmod{3}$

Δηλαδή πρέπει να είναι

$$3 \mid (a + b + 1)(a^2 + b^2 - ab - a - b + 1)$$

Περίπτωση1: $3 \mid (a + b + 1)$

Πρέπει να έχουμε $a + b \equiv 2 \pmod{3}$

Δηλαδή, χωρίς βλάβη της γενναιότητας έχουμε τις παρακάτω περιπτώσεις

- $a \equiv b \equiv 1 \pmod{3}$

Εδώ έχουμε ότι $a^2 + b^2 - ab - a - b + 1 \equiv 0 \pmod{3}$, δηλαδή

$$\begin{aligned} (a + b + 1)(a^2 + b^2 - ab - a - b + 1) \\ = 3x \cdot 3y = 9xy \equiv 0 \pmod{9} \end{aligned}$$

Άλλα $2017^c + 2 \equiv 1 + 2 \equiv 3 \pmod{9}$

Άρα η εξίσωση είναι αδύνατη σε αυτή την περίπτωση

- $a \equiv 2 \pmod{3}$, $b \equiv 0 \pmod{3}$

Εδώ επίσης έχουμε ότι

$a^2 + b^2 - ab - a - b + 1 \equiv 0 \pmod{3}$ και όμοια η εξίσωση είναι αδύνατη σε αυτή την περίπτωση.

Περίπτωση2: $3 \nmid (a + b + 1)$

Πρέπει να έχουμε $a + b \equiv 0$ ή $1 \pmod{3}$

Δηλαδή, χωρίς βλάβη της γενναιότητας, έχουμε τις παρακάτω περιπτώσεις.

- $a \equiv b \equiv 2 \pmod{3}$

Εδώ έχουμε ότι

$$a^2 + b^2 - ab - a - b + 1 \equiv 1 \pmod{3}$$

Με άλλα λόγια

$3 \nmid (a + b + 1)(a^2 + b^2 - ab - a - b + 1)$, που είναι άτοπο

- $a \equiv b \equiv 0 \pmod{3}$

Εδώ έχουμε ότι

$$a^2 + b^2 - ab - a - b + 1 \equiv 1 \pmod{3}$$

και όμοια η εξίσωση είναι αδύνατη σε αυτή την περίπτωση.

- $a \equiv 1 \pmod{3}$, $b \equiv 2 \pmod{3}$

Εδώ έχουμε ότι $a^2 + b^2 - ab - a - b + 1 \equiv 1 \pmod{3}$

και όμοια η εξίσωση είναι αδύνατη σε αυτή την περίπτωση

Τελικά η εξίσωση δεν έχει ακέραιες λύσεις.

2. Πρώτα αφού $a + b + c = 1$

$$\begin{aligned} a + bc &= 1 - b - c + bc = (1 - b)(1 - c) \\ &= (a + c)(a + b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Έχουμε ότι } \frac{1}{a+bc} + \frac{1}{b+ac} + \frac{1}{c+ab} + 4abc &= \frac{(a+b) + (b+c) + (c+a)}{(a+b)(b+c)(c+a)} + 4abc \\ &= \frac{2}{(a+b)(b+c)(c+a)} + 4abc \end{aligned}$$

Άρα η αποδεικτέα γράφεται

$$\frac{4}{(a+b)(b+c)(c+a)} + 8abc < \frac{5}{8abc}$$

Από την ανισότητα ΑΜ-ΓΜ

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}, b + c \geq 2\sqrt{bc}, c + a \geq 2\sqrt{ca}$$

$$\text{Δηλαδή } abc \leq (a+b)(b+c)(c+a) : (1)$$

και έτσι

$$\begin{aligned} A &= \frac{4}{(a+b)(b+c)(c+a)} + 8abc \\ &\leq (a+b)(b+c)(c+a) + \frac{4}{(a+b)(b+c)(c+a)} \end{aligned}$$

$$\text{Θέτουμε } (a+b)(b+c)(c+a) = \lambda$$

$$\text{Δηλαδή } A \leq \lambda + \frac{4}{\lambda} = \frac{\lambda^2 + 4}{\lambda}$$

$$\text{Αφού } a + b + c = 1$$

$$\Rightarrow a + b < 1, b + c < 1, c + a < 1$$

Έχουμε ότι $\lambda < 1$, δηλαδή

$$A < \frac{5}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

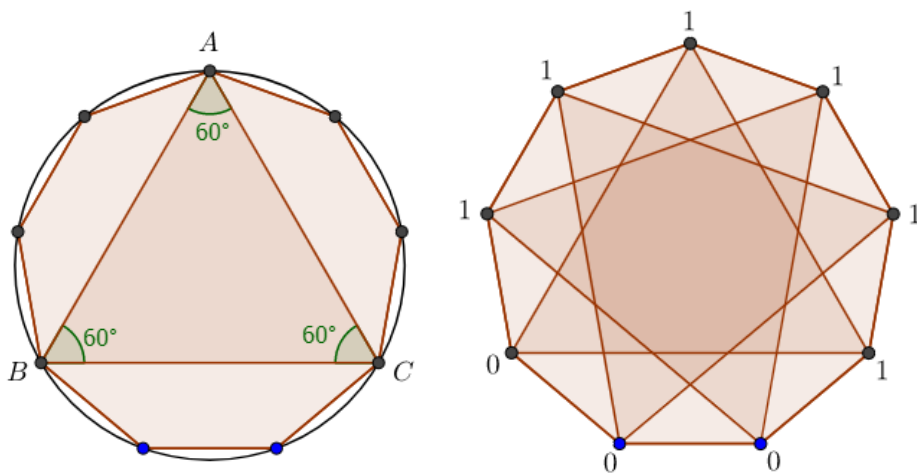
Και από την σχέση (1), έχουμε ότι

$$A < \frac{5}{(a+b)(b+c)(c+a)} \leq \frac{5}{8abc}$$

Άρα το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

3. **Ισχυρισμός:** Σε κάθε κανονικό εννεάγωνο υπάρχουν ακριβώς τρεις κανονικές τριάδες.

Απόδειξη: Σχηματίζουμε τον περιγεγραμμένο κύκλο του εννεάγωνου. Το εννεάγωνο διαιρεί το κύκλο σε τόξα $\frac{360}{9} = 40^\circ$. Έτσι αν σχηματίζουμε το τρίγωνο ABC σαν το παρακάτω σχήμα, τότε είναι ισόπλευρο αφού $\angle A = \angle B = \angle C = \frac{120}{2} = 60^\circ$. Τώρα έχουμε τρεις διαφορετικές περιστροφές του τριγώνου ABC , όπου ένα είναι το τρίγωνο στο παρακάτω σχήμα.



Σε κάθε ισόπλευρο τρίγωνο πρέπει να έχουμε 1 μηδενικό και 2 άσσους.

Άρα, μπορούμε να σημειώνουμε κάθε ισόπλευρο τρίγωνο με $\binom{3}{2} = 3$ τρόπους. Έτσι μπορούμε να σημειώνουμε το εννεάγωνο σε $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ τρόπους, χωρίς την συνθήκη να είναι τακτοποιημένα.

Για τα μη-τακτοποιημένα 9-γωνα, πρέπει να επιλέξουμε μία κορυφή και μετά δυο διπλανές κορυφές του. Μετά, αφού το άθροισμα κάθε κανονικής τριάδας πρέπει να είναι 2, οι άλλες κορυφές πρέπει να είναι σημειωμένες με άσσους. Έτσι έχουμε 9 μη-τακτοποιημένα 9-γωνα.

Τελικά η απάντηση είναι $27 - 9 = 18$ τρόπους.

[illegible]

Στο τρίγωνο ABC , οι ευθείες AZ, BX και CY συντρέχουν και έτσι από το θεώρημα Σέβα,

$$\frac{AY}{YB} \cdot \frac{BZ}{CZ} \cdot \frac{XC}{AX} = 1$$

$$XY \parallel BC$$

Έστω ότι ε είναι η εφαπτομένη στο A του κύκλου (Γ) και ω είναι τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου AXY , τότε από τη σχέση (1) και το θεώρημα χορδής εφαπτόμενης, έχουμε ότι

$\angle \varepsilon AX = \angle \varepsilon AC = ABC = \angle AYX$, δηλαδή από το θεώρημα υπό χορδής εφαπτομένης, ε είναι η εφαπτομένη στο A του κύκλου ω . Άρα οι κύκλοι εφάπτονται στο σημείο A με κοινή εφαπτομένη ε .

5. Χωρίς βλάβη της γενναιότητας θέτουμε

$$x > y > z \geq 1$$

Αφού διαφορετικοί θετικοί ακέραιοι έχουν τουλάχιστον διαφορά 1 , έχουμε

$$x \geq y + 1 \geq z + 2, \text{ δηλαδή}$$

$$x - y \geq 1 \quad , \quad y - z \geq 1 \quad \text{και} \quad x - z \geq 2$$

$$\Leftrightarrow (x - y)^2 \geq 1 \quad , \quad (y - z)^2 \geq 1 \quad \text{και} \quad (x - z)^2 \geq 4$$

$$\Leftrightarrow (xz - yz)^2 \geq z^2 \quad , \quad (yx - zx)^2 \geq x^2 \quad \text{και} \quad (xy - zy)^2 \geq 4y^2$$

Έτσι

$$(xz - yz)^2 + (yx - zx)^2 + (xy - zy)^2 \geq x^2 + 4y^2 + z^2$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) - 2xyz(x + y + z) \\ \geq x^2 + 4y^2 + z^2 \end{aligned}$$

$$\text{Διότι } x \geq z + 2 \geq 3 \quad , \quad y \geq z + 1 \geq 2 \quad \text{και} \quad z \geq 1$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) - 2xyz(x + y + z) &\geq 3x + 8y + z \\ &\geq 3x + 6y + 2(z + 1) + z \\ &\geq 3(x + y + z) + 6y + 2 \\ &\geq 3(x + y + z) + 2 \end{aligned}$$

Άρα

$$2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 - 4) \geq (x + y + z)(2xyz + 3)$$

Με ισότητα όταν $x = y + 1 = z + 3 = 3$, δηλαδή όταν

$$(x, y, z) = (3, 2, 1)$$

Ασκήσεις Εμπλουτισμού

1. Αν x και y είναι πραγματικοί αριθμοί έτσι ώστε

$$(2x + 1)^2 + y^2 + (y - 2x)^2 = \frac{1}{3}, \text{ να βρείτε την τιμή του } x + y.$$

(Διαγωνισμός IMC)

2. Αν a, b, c και d είναι πραγματικοί αριθμοί έτσι ώστε

$$a + b = c + d \text{ και } a^2 + b^2 > c^2 + d^2$$

Να δείξετε ότι: $a^3 + b^3 > c^3 + d^3$

(Βιβλίο μαθηματική ολυμπιάδα της Περσίας)

3. Αν α, β και γ είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^3 + 2017x + 1 = 0$, να βρείτε την τιμή της παράστασης $E = (\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha)$

4. Αν a, b και c είναι πραγματικοί αριθμοί έτσι ώστε $a + b + c = 1$, να δείξετε ότι:

$$\frac{a^2 + a}{a + bc} + \frac{b^2 + b}{b + ca} + \frac{c^2 + c}{c + ab} = 3$$

(Βιβλίο μαθηματική ολυμπιάδα της Περσίας)

5. Αν a, b και c είναι θετικοί αριθμοί να δείξετε ότι

$$\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} \geq a + b + c$$

(Ολυμπιάδα Καναδάς 2002)

6. Αν a, b και c είναι πραγματικοί αριθμοί έτσι ώστε $a + b + c = 1$, να δείξετε ότι:

$$\frac{7 + 2b}{1 + a} + \frac{7 + 2c}{1 + b} + \frac{7 + 2a}{1 + c} \geq \frac{69}{4}$$

(JBMO Shortlist)

7. Να βρεθούν όλοι οι θετικοί ακέραιοι n ώστε ο αριθμός

$$A_n = \frac{2^{4n+2} + 1}{65} \text{ να είναι πρώτος}$$

(JBMO Shortlist)

8. Να βρεθούν όλοι οι μη-αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί (x, y, z) τέτοιοι ώστε: $2013^x + 2014^y = 2015^z$

(JBMO Shortlist)

9. Να βρεθούν όλοι οι ακέραιοι αριθμοί (α, β) τέτοιοι ώστε:

$$(\alpha^3 + \beta)(\alpha + \beta^3) = (\alpha + \beta)^4$$

(Austrian Regional Competition for Advanced Students)

10. Να βρεθούν όλοι οι μη-αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί (x, y, z) τέτοιοι ώστε: $21^x + 4^y = z^2$

(JBMO TST- Romania)

11. Να βρεθούν όλοι οι ακέραιοι αριθμοί (m, n) $m > 1$, $n > 1$ τέτοιοι ώστε: $mn - 1 \mid n^3 - 1$
(JBMO TST- Romania)
12. Έστω $c \equiv c(O, R)$ κύκλος με κέντρο το O και ακτίνα R και δύο σημεία του A, B , τα οποία δεν ανήκουν στην ίδια διάμετρο. Έστω c_1 ο περιγεγραμμένος στο τρίγωνο AOB κύκλος και c_2 ο περιγεγραμμένος στο τρίγωνο AOC κύκλος. Η διχοτόμος της γωνίας $\angle ABO$ τέμνει τον κύκλο c στο σημείο C , τον κύκλο c_1 στο σημείο K και τον κύκλο c_2 στο σημείο L . Να αποδείξετε ότι το σημείο K είναι το περίκεντρο του τριγώνου AOC και το σημείο L είναι το έγκεντρο του τριγώνου AOB
(JBMO Shortlist)
13. Έστω P και Q τα μέσα των πλευρών BC και CD ενός ορθογωνίου $ABCD$, αντίστοιχα. Έστω K και M τα σημεία τομής της ευθείας PD με τις QB και QA , αντίστοιχα, και N το σημείο τομής των ευθειών PA και QB . Έστω X, Y, Z τα μέσα των ευθυγράμμων τμημάτων AN, KN, AM , αντίστοιχα. Έστω l_1 η ευθεία που περνά από το X και είναι κάθετη στην MK , l_2 η ευθεία που περνά από το Y και είναι κάθετη στην AM και l_3 η ευθεία που περνά από το Z και είναι κάθετη στην KN . Να δείξετε ότι οι l_1, l_2, l_3 συντρέχουν (περνάνε από το ίδιο σημείο)
(JBMO Shortlist)
14. Το $ABCD$ είναι εγγεγραμμένο τετράπλευρο για το οποίο ισχύει $BC = CD$. Το σημείο E είναι το μέσο της διαγωνίου AC . Να αποδείξετε ότι $BE + DE \geq AC$
(Ολυμπιάδα Ρωσίας)
15. Σε μία χώρα με n πόλεις, όλες οι απευθείας πτήσεις είναι διπλής κατεύθυνσης (πήγαινε-έλα). Υπάρχουν $r > 2014$ διαδρομές ανάμεσα σε διαφορετικά ζεύγη πόλεων, οι οποίες περιλαμβάνουν όχι περισσότερες από μία ενδιάμεση στάση (η κατεύθυνση της κάθε διαδρομής έχει σημασία). Να βρεθεί η ελάχιστη δυνατή τιμή του n και το ελάχιστο δυνατό r για αυτήν την τιμή του n .
(JBMO Shortlist)
16. Δίνονται 2015 σημεία σε ένα επίπεδο, τέτοια ώστε από οποιαδήποτε 5 από αυτά να μπορούμε να επιλέξουμε 2 τα οποία να απέχουν μεταξύ τους λιγότερο από 1 μονάδα. Να δείξετε ότι 504 από τα δοσμένα σημεία ανήκουν σε έναν μοναδιαίο δίσκο.
(JBMO Shortlist)

17. Ο Αλέξανδρος παρατήρησε, ότι στο πληκτρολόγιο του έμειναν n λειτουργικά πλήκτρα με ψηφία. Προέκυψε, ότι οποιοδήποτε φυσικός αριθμός από το 1 μέχρι το 99 999 999 μπορεί να σχηματιστεί, είτε πληκτρολογώντας τα λειτουργικά πλήκτρα, είτε ως αποτέλεσμα αθροίσματος δυο φυσικών αριθμών, καθένας εκ των οποίων μπορεί να πληκτρολογηθεί, χρησιμοποιώντας τα πλήκτρα που λειτουργούν. Για ποιο ελάχιστο n , αυτό είναι δυνατό;
(Ολυμπιάδα Ρωσίας)

Βιβλιογραφία

- 1) Algebraic strategies in mathematical Olympiads (Inequalities)
Mohammad Jafari – ISBN= 978-600-5230-154
- 2) Behind the scenes of solving an enumerative combinatorics
Seyed Ehsan Azaramsa, Negin Sadat Mousavi
ISBN= 978-600-5695-43-4
- 3) Problems in number theory for mathematical Olympiads (Iranian
Mathematical Olympiads)
Abbas Servatti- ISBN= 978-964-7685-87-0
- 4) 5 and 1 Chapters in inequalities
Sina Rezaei Zarei- ISBN=978-600-5695-77-9
- 5) Topics and problems in mathematical Olympiads (First Round)
Pouria Babavi and Mohammad Jafari- ISBN=978-600-7950-50-0
- 6) Preparing for Mathematical Olympiads Rasool Mohseni Manesh and Isa
Mohammadi – ISBN=978-600-5695-62-5
- 7) Η ιστοσελίδα <http://www.mathematica.gr>
- 8) Η ιστοσελίδα <https://artofproblemsolving.com>

Αυτό το βιβλίο προετοιμάζει όσους μαθητές επιθυμούν να λάβουν μέρος σε τέτοιους διαγωνισμούς. Το βιβλίο αυτό δεν είναι ούτε πολύ δύσκολο αλλά ούτε πολύ εύκολο και μπορούν να το χρησιμοποιήσουν μαθητές γυμνασίου αλλά και Α' λυκείου. Αποτελείται από 4 ενότητες με υπό-ενότητες. Κάθε υπό-ενότητα του βιβλίου ξεκινά από ένα εγχειρίδιο, και στο τέλος, υπάρχουν λυμένα προβλήματα τα οποία κυρίως βασίζονται σε θέματα από τις ολυμπιάδες

